Список литературы

1. *Шевченко Ю. И.* Связности, ассоциированные с распределением плоскостей в проективном пространстве. Калининград, 2009.

A. Vyalova

GENERALIZED AFFINE CONNECTION IN THE PROJECTIVE GROUP

In many-dimensional projective space the projective group as affine frame bundle with linear frame factor-bundle under the base — space of hyperplanes of projective space is introduced. In the principal affine frame bundle general affine connection by Lumiste way is given. The connection object is quasitensor, which contains subquasitensor, seting dual affine subconnection in the linear frame factor-bundle. Torsion and curvature tensors of the general affine connection, containing torsion and curvature subtensors of the dual affine subconnection, are constructed.

УДК 514.75

Н. А. Елисеева

(Калининградский государственный технический университет)

ПОЛЯ ПЛОСКОСТЕЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ В НОРМАЛЬНЫХ СВЯЗНОСТЯХ $\mathcal{H}$(П)-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрены поля плоскостей, являющиеся параллельными в нормальных связностях, индуцируемых $\mathcal{H}$(П)-распределением в расслоениях нормалей 1-го рода на оснащенном в смысле Нордена — Картана Λ-подрасслоении [1].

Ключевые слова: нормальная связность, распределение, подрасслоение, поле плоскостей, оснащение.

В работе используется следующая система индексов:

$$K=\overline{1,n}\,;\ p,q=\overline{1,r}\,;\ i,j=\overline{r+1,m}\,;\ \alpha,\beta=\overline{m+1,n-1}\,;$$

$$u,v,x=\overline{r+1,n-1}\,;\ \hat{u},\hat{v}=\overline{r+1,n}\,;\ \Phi=0,1\,;\ \Psi=\overline{0,11}\,,\ \psi=\overline{1,11}\,.$$

Определение. *Λ-подрасслоение называется нормализованным в смысле Нордена — Чакмазяна* [2], *если к нему инвариантным образом присоединены поля нормалей 1-го рода* $N_{n-r}(A_0)$ *и нормалей 2-го рода* $N_{r-1}(A_0)$, *определяемые соответственно полями квазитензоров*

$$\nabla\nu_n^p+\omega_n^p=\nu_{nK}^{\,p}\omega_0^K\,,\ \nabla\nu_p^0+\omega_p^0=\nu_{pK}^{\,0}\omega_0^K\,, \tag{1}$$

причем в каждом центре A_0 *нормаль 1-го рода* $N_{n-r}(A_0)=[\Phi_{n-r-1},X_n]$ *проходит через характеристику* $\Phi_{n-r-1}(A_0)$ *текущего элемента* $H(A_0)$ *поля гиперплоскостей H, полученную при смещениях центра* A_0 *вдоль интегральных кривых Λ-подрасслоения.*

Требование инвариантности нормали $N_{n-r}(A_0)$, где $X_n=A_n+\nu_n^pA_p+\nu_n^uA_u$ приводит к условиям (1). Если потребовать, чтобы прямая $\lambda_1=[A_0,X_n]$ была инвариантна, то кроме (1), получим условия

$$\nabla\nu_n^u+\omega_n^u=\nu_{nK}^u\omega_0^K\,. \tag{2}$$

Уравнения (2) выполняются, если охват объекта ν_n^u осуществить с помощью квазитензора λ_n^u:

$$\lambda_n^u=\{\lambda_n^i,\lambda_n^\alpha\}\,,\ \nabla\lambda_n^u+\omega_n^u=\lambda_{nK}^u\omega_0^K\,,$$

$$\lambda_n^i=\frac{1}{r}\Lambda_{pq}^i\Lambda_n^{qp}\,,\ \nabla\lambda_n^i+\omega_n^i=\lambda_{nK}^i\omega_0^K\,,$$

$$\lambda_n^\alpha=\frac{1}{r}\Lambda_{pq}^\alpha\Lambda_n^{qp}\,,\ \nabla\lambda_n^\alpha+\omega_n^\alpha=\lambda_{nK}^\alpha\omega_0^K\,.$$

В дальнейшем считаем, что прямая $\lambda_1 = [A_0, X_n]$, где

$$X_n = A_n + \nu_n^p A_p + \lambda_n^u A_u, \tag{3}$$

инвариантна. Нормаль второго рода N_{r-1} задается r точками $X_p = A_p + \nu_p^0 A_0$.

Если охваты квазитензоров осуществить по формулам $\nu_n^p = \lambda_n^p$ и $\nu_p^0 = \lambda_p^0$, где

$$\lambda_n^p = \frac{1}{m-r} \Lambda_{ij}^p \Lambda_n^{ji}, \ \nabla\lambda_n^p + \omega_n^p = \lambda_{nK}^{\ p} \omega_0^K,$$

$$\lambda_p^0 = \frac{1}{s} \Lambda_{pi}^i, \ \nabla\lambda_p^0 + \omega_p^0 = \lambda_{pK}^{\ 0} \omega_0^K,$$

то к Λ-подрасслоению $\mathcal{H}$(П)-распределения в дифференциальной окрестности 1-го порядка внутренним образом присоединяется нормализация Нордена — Чакмазяна.

Пусть на оснащенном в смысле Нордена — Чакмазяна $\mathcal{H}$(П)-распределении задано поле U-мерных ($U \le n-r$) плоскостей N_U, каждая из которых проходит через соответствующий центр A_0 распределения и лежит в соответствующей нормали первого рода: $N_U(A_0) \subset N_{n-r}(A_0)$.

Определение [3]. *Поле U-мерных плоскостей $N_U(A_0)$, называется параллельным в нормальной связности $\overset{00}{\nabla}{}^{\perp}$, если при инфинитезимальном перемещении точки A_0 вдоль любой кривой λ, принадлежащей базисному распределению подмногообразия $\mathcal{H}$(П), смещение U-мерной плоскости $N_U(A_0)$ происходит в $(r+U)$-мерной плоскости, натянутой на текущий элемент базисного распределения и на плоскость $N_U(A_0)$.*

Если $N_1(A_0)$ — гладкое поле одномерных направлений $[A_0 M]$, принадлежащее полю $N_{n-r}(A_0)$, то точка M имеет разложение

$$M = A_0 + x^{\alpha} A_{\alpha} + x^i A_i + x^n X_n\,,$$

где не все $x^{\hat{u}}$ одновременно равны нулю, а точка X_n определяется соотношением (3). При $x^n = 0$ это поле одномерных направлений $[\,A_0,\,M\,]$ принадлежит полю характеристик $\Phi_{n-r-1}(\,A_0\,)$, при $x^n = x^i = 0$ — E-распределению [4], при $x^n = x^{\alpha} = 0$ — L-распределению [4], а при $x^u = 0$ совпадает с полем инвариантных прямых λ_1.

В статье [3] приведено условие параллельности поля $N_1(\,A_0\,)$ одномерных направлений $[\,A_0,\,M\,]$ в нормальной связности $\overset{00}{\nabla}{}^{\perp}$:

$$dx^{\hat{u}} + x^{\hat{v}}\overset{00}{\Theta}{}^{\hat{u}}_{\hat{v}} - x^{\hat{u}} x^{\hat{v}}\overset{00}{\Theta}{}^{0}_{\hat{v}} = x^{\hat{u}}\Theta\ (mod\,\lambda\,)\,,\ D\Theta = \Theta \wedge \Theta^0_0\,. \qquad (4)$$

Выражения форм $\{\overset{00}{\Theta}{}^{0}_{\hat{u}}, \overset{00}{\Theta}{}^{\hat{v}}_{\hat{u}}\}$, определяющих связность $\overset{00}{\nabla}{}^{\perp}$, имеют вид:

$$\overset{00}{\Theta}{}^{0}_{v} = \omega^0_v + \nu^0_q(\nu^q_n\omega^n_v - \omega^q_v) + \lambda^0_v\lambda^0_u\omega^u_0 - \lambda^0_v(\lambda^0_u\lambda^u_n + \nu^0_n)\omega^n_0\,,$$

$$\overset{00}{\Theta}{}^{0}_{n} = \omega^0_n + \nu^p_n\omega^0_p + \lambda^v_n\omega^0_v - \nu^0_q[\,\nu^q_{nK}\omega^K_0 + \lambda^v_n\omega^q_v -$$
$$-\nu^q_n(\,\nu^p_n\omega^n_p + \lambda^v_n\omega^n_v\,)] - \nu^0_n\lambda^0_u\omega^u_0 + \nu^0_n(\,\lambda^0_u\lambda^u_n + \nu^0_n\,)\omega^n_0\,,$$

$$\overset{00}{\Theta}{}^{u}_{v} = \omega^u_v - \lambda^0_v\omega^u_0 - \lambda^u_n(\,\omega^n_v - \lambda^0_v\omega^n_0\,) - \delta^u_v[\,\omega^0_0 + \lambda^0_x\omega^x_0 -$$
$$-\nu^0_p\omega^p_0 - (\,\lambda^0_x\lambda^x_n + \nu^0_p\nu^p_n + \nu^0_n\,)\omega^n_0\,],$$

$$\overset{00}{\Theta}{}^{u}_{n} = \lambda^u_{nK}\omega^K_0 + \nu^p_n\omega^u_p - \lambda^u_n(\nu^p_n\omega^n_p + \lambda^v_n\omega^n_v\,) + \nu^0_n(\,\omega^u_0 - \lambda^u_n\omega^n_0\,),$$

$$\overset{00}{\Theta}{}^{n}_{v} = \omega^n_v - \lambda^0_v\omega^n_0\,,$$

$$\overset{00}{\Theta}{}^{n}_{n} = \omega^n_n - \omega^0_0 - \lambda^0_u\omega^u_0 + \nu^0_p\omega^p_0 + \nu^p_n\omega^n_p + \lambda^v_n\omega^n_v +$$
$$+(\lambda^0_u\lambda^u_n - \nu^0_p\nu^p_n + 2\nu^0_n)\omega^n_0\,.$$

Зависимость между системой слоевых форм $\{\overset{00}{\Theta}{}^{0}_{\hat{u}},\overset{00}{\Theta}{}^{\hat{v}}_{\hat{u}}\}$ и системами форм $\{\overset{\Phi\Psi}{\Theta}{}^{0}_{\hat{u}},\overset{\Phi\Psi}{\Theta}{}^{\hat{v}}_{\hat{u}}\}$ [1], определяющими нормальные связности $\overset{\Phi\Psi}{\nabla}{}^{\perp}$ в расслоении нормалей первого рода на Λ-подрасслоении $\mathcal{H}(\Pi)$-распределения, задается формулами:

$$\overset{\Phi\Psi}{\Theta}{}^{0}_{v}=\overset{00}{\Theta}{}^{0}_{v}+\overset{\Phi}{\Gamma}{}^{n}_{vu}\nu^{0}_{n}(\omega^{u}_{0}-\lambda^{u}_{n}\omega^{n}_{0}),$$

$$\overset{\Phi\Psi}{\Theta}{}^{0}_{n}=\overset{00}{\Theta}{}^{0}_{n}+\overset{\Psi}{\Gamma}{}^{n}_{nq}\nu^{0}_{n}(\omega^{q}_{0}-\nu^{q}_{n}\omega^{n}_{0}),\ \overset{\Phi\Psi}{\Theta}{}^{u}_{v}=\overset{00}{\Theta}{}^{u}_{v},\ \overset{\Phi\Psi}{\Theta}{}^{u}_{n}=\overset{00}{\Theta}{}^{u}_{n},$$

$$\overset{\Phi\Psi}{\Theta}{}^{n}_{v}=\overset{00}{\Theta}{}^{n}_{v}+\overset{\Phi}{\Gamma}{}^{n}_{vu}(\omega^{u}_{0}-\lambda^{u}_{n}\omega^{n}_{0}),\ \overset{\Phi\Psi}{\Theta}{}^{n}_{n}=\overset{00}{\Theta}{}^{n}_{n}+\overset{\Psi}{\Gamma}{}^{n}_{nq}(\omega^{q}_{0}-\nu^{q}_{n}\omega^{n}_{0}).$$

По аналогии с (4) будем считать поле U-мерных плоскостей $N_U\subset N_{n-r}$ параллельным в нормальной связности $\overset{\Phi\psi}{\nabla}{}^{\perp}$, если выполняются условия:

$$dx^{\hat{u}}+x^{\hat{v}}\overset{\Phi\psi}{\Theta}{}^{\hat{u}}_{\hat{v}}-x^{\hat{u}}x^{\hat{v}}\overset{\Phi\psi}{\Theta}{}^{0}_{\hat{v}}=x^{\hat{u}}\Theta\ (mod\,\lambda),\ D\Theta=\Theta\wedge\Theta^{0}_{0}. \quad (5)$$

Соотношения (4) и (5) в силу равенств $\overset{\Phi\Psi}{\Theta}{}^{n}_{v}=0(mod\,\lambda)$ тождественно выполняются при $x^n=0$, поэтому поле характеристик $\Phi_{n-r-1}(A_0)$ подмногообразия $\mathcal{H}(\Pi)$ параллельно в каждой нормальной связности $\overset{\Phi\Psi}{\nabla}{}^{\perp}$.

Из формул (4, 5) следует, что поле инвариантных прямых $[A_0, X_n]$ ($x^u=0$) параллельно в нормальной связности $\overset{\Phi\Psi}{\nabla}{}^{\perp}$ тогда и только тогда, когда имеют место равенства

$$\overset{\Phi\Psi}{\Theta}{}^{u}_{n}=0\ (mod\,\lambda).$$

Из (5) при $x^n=x^i=0$ имеем

$$\overset{\Phi\Psi}{\Theta}{}^{i}_{\alpha}=0 \quad (\mathrm{mod}\,\lambda), \quad (6)$$

то есть поле E-плоскостей параллельно в нормальной связности $\overset{\Phi\Psi}{\nabla}{}^{\perp}$, если выполняются соотношения (6). Равенства (6) равносильны

$$\omega_\alpha^i = 0 \quad (\mathrm{mod}\,\lambda) \Leftrightarrow \Lambda_{\alpha p}^i = 0\,. \tag{7}$$

Условия (7) выполняются, например, тогда, когда Ψ-распределение несет двухкомпонентную сопряженную систему (Λ, E) или когда Ψ-распределение голономно.

Аналогично поле плоскостей L параллельно в каждой нормальной связности $\overset{\Phi\Psi}{\nabla}{}^{\perp}$ тогда и только тогда, когда

$$\overset{\Phi\Psi}{\Theta}{}_i^\alpha = 0 \ (mod\,\lambda)\,, \tag{8}$$

что равносильно

$$\Lambda_{ip}^\alpha = 0\,. \tag{9}$$

Равенства (9) выполняются, например, тогда, когда M-подрасслоение несет двухкомпонентную сопряженную систему (Λ, L). В частности, если M-подрасслоение голономно, то (9) выполняется (M-подрасслоение несет сопряженную систему (Λ, L)) и, следовательно, в любой нормальной связности $\overset{\Phi\Psi}{\nabla}{}^{\perp}$ поле L-плоскостей переносится параллельно.

Соотношениям (9) и (7) можно дать следующую геометрическую интерпретацию:

1) условие (7) является необходимым и достаточным условием того, что $\mathcal{H}$(П)-распределение представляет собой $(n-r)$-параметрическое семейство тангенциально вырожденных гиперполос $H_{n-m+r-1}^r$;

2) равенство (9) является необходимым и достаточным условием того, что $\mathcal{H}$(П)-распределение представляет собой

$(n-r)$-параметрическое семейство тангенциально вырожденных гиперполос H_m^r;

3) равенства (8, 9) являются необходимым и достаточным условием того, что $\mathcal{H}$(П)-распределение представляет собой $(n-r)$-параметрическое семейство тангенциально вырожденных гиперполос H_r со скомпонованным полем характеристик $\Phi_{n-r-1}(A_0)=[\Psi(A_0),L(A_0)]$.

Список литературы

1. *Елисеева Н.* А. Нормальные связности, индуцируемые в расслоении нормалей первого рода на Λ-подрасслоении $\mathcal{H}$(П)-распределения // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 37. Калининград, 2006. С. 44—51.

2. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства: монография. СПб., 1992.

3. *Столяров А.В.* Двойственные нормальные связности на регулярной неголономной гиперполосе // Изв. НАНИ ЧР (физ.-мат. науки). Чебоксары, 1996. №6. С. 9—14.

4. *Елисеева Н.* А. Оснащения в смысле Э. Картана L-, M- подрасслоений полосного распределения // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 36. Калининград, 2005. С. 36—42.

N. Eliseeva

PLANE FIELDS PARALLEL IN NORMAL CONNECTIONS OF $\mathcal{H}$(П)-DISTRIBUTION

Plane fields parallel in normal connections, induced in a bundle of normals of the 1-st kind on Λ-subbundle of $\mathcal{H}$(П)-distribution are considered.