УДК 514.76

С. В. Галаев[1]

[1] *Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

sgalaev@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-7

Связности с параллельным кососимметрическим кручением на субримановых многообразиях

На субримановом многообразии M контактного типа рассматривается N-связность ∇^N, определяемая парой (∇ , N), где ∇ — внутренняя метрическая связность, $N : D \to D$ — эндоморфизм распределения D. Доказывается, что существует, и причем единственная, N-связность ∇^N такая, что ее кручение, представленное трехвалентным ковариантным тензором, кососимметрично. Находится строение соответствующего этой связности эндоморфизма. Приводятся условия, при которых полученная связность является метрической связностью, а ее кручение — параллельным тензорным полем.

Ключевые слова: субриманово многообразие контактного типа, внутренняя связность, плоская полуметрическая связность с кососимметрическим кручением, тензор Схоутена.

Введение

Субримановым многообразием контактного типа называется гладкое многообразие M, оснащенное субримановой структурой $\left(M, \vec{\xi}, \eta, g\right)$, где η и $\vec{\xi}$ — 1-форма и единичное векторное поле, порождающие ортогональные между собой

Поступила в редакцию 15.05.2020 г.

распределения D и $D^{\perp}$ соответственно. Субриманово многообразие нечетной размерности, оснащенное дополнительно эндоморфизмом $\varphi : D \to D$ таким, что $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}$, называется почти контактным метрическим многообразием. Если почти контактное метрическое многообразие представляет собой интерес как обобщение поверхности эрмитова пространства, то мотивация к исследованию субриманова многообразия вызвана необходимостью построения математических моделей в задачах теории управления и неголономной механики. Различие в мотивации исследования почти контактных метрических многообразий и субримановых многообразий проявляется в выборе связностей, задающих параллельный перенос на многообразиях. Для почти контактных метрических многообразий, образующих специальный класс римановых многообразий, естественным является выбор связности Леви-Чивиты. В геометрии субримановых многообразий используются связности, обеспечивающие параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых. В настоящей работе такие связности определяются парой (∇ , N), где ∇ — внутренняя метрическая связность, а $N : D \to D$ — эндоморфизм распределения D, называемый в работе структурным эндоморфизмом. Говоря об эндоморфизме распределения D, мы имеем в виду эндоморфизм $N : TM \to TM$ такой, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$.

В настоящей работе на субримановом многообразии контактного типа M наряду со связностью Леви-Чивиты $\tilde{\nabla}$ рассматривается N-связность ∇^N с ненулевым кососимметрическим кручением S. Здесь $N : TM \to TM$ — эндоморфизм, определяемый равенством $NX = S(\vec{\xi}, X)$. Мотивация к изучению N-связности подкрепляется богатыми приложениями римановых многообразий со связностями с кручением в теоретической физике [1; 5]. Особый интерес представляют связности с кососимметрическим кручением [6; 7; 9—11]. Известно, что метрическая связность с кососимметрическим кручением имеет те же геодезические, что и связность Леви-Чивиты. В настоящей работе доказывается, что на субримановом многообразии существует единственная N-связность ∇^N с ненулевым кососимметрическим кручением S, которая метрическая тогда и только тогда, когда выполняется равенство $L_{\vec{\xi}}g = 0$. Доказывается, что эта связность единственна и соответствующий ей эндоморфизм имеет следующее строение: $\mathrm{N} = 2\psi$, где эндоморфизм ψ определяется равенством $\omega(X,Y) = g(\psi X,Y)$. Особый интерес для исследователей представляют многообразия со связностями с параллельными полями кручения [11]. В работе [4] автора приведены примеры связностей с кручением, задаваемых на многообразиях с почти контактной (субримановой) структурой. Некоторые виды указанных связностей принадлежат классу N-связностей. Однако до настоящего времени не приводились примеры римановых многообразий, оснащенных метрической N-связностью с параллельным кососимметрическим кручением.

Определение и основные свойства N-связности с кососимметрическим кручением

Пусть M — гладкое многообразие размерности $n=2m+1$, $m \geq 1$, с заданной на нем субримановой структурой $\left(M,\vec{\xi},\eta,g,D\right)$, где η и $\vec{\xi}$ — 1-форма и единичное векторное поле, порождающие ортогональные между собой распределения D и $D^{\perp}$ соответственно. Нечетная размерность многообразия выбрана исключительно для удобства перехода к многообразиям с почти контактной метрической структурой без дополнительных рассуждений о размерности.

Известно [8], что на субримановом многообразии существует единственная внутренняя связность ∇ с нулевым кручением такая, что $\nabla_X g(Y,Z) = 0$, $X,Y,Z \in \Gamma(D)$. Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным $S\left(X,Y\right)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-P[X,Y]$, где $P\colon TM\to D$ — проектор, определяемый разложением $TM=D\oplus D^{\perp}$.

Пусть $K(x^{\alpha})$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n;\ a, b, c = 1, ..., n-1$) — карта многообразия M, адаптированная к распределению D [12]. Векторные поля $P(\partial_a)=\vec{e}_a=\partial_a-\Gamma_a^n\partial_n$ порождают систему D: $D=span(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии M неголономное поле базисов $(\vec{e}_\alpha)=(\vec{e}_a,\partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a,\eta=\Theta^n=dx^n+\Gamma_a^n dx^a)$.

Пусть $\tilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивиты и $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}$ — ее коэффициенты. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 1. *Коэффициенты связности Леви-Чивиты субриманова многообразия в адаптированных координатах имеют вид*

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^{c}=\Gamma_{ab}^{c},\ \tilde{\Gamma}_{ab}^{n}=\omega_{ba}-C_{ab},$$

$$\tilde{\Gamma}_{an}^{b}=\tilde{\Gamma}_{na}^{b}=C_a^b+\psi_a^b,\ \tilde{\Gamma}_{na}^{n}=\tilde{\Gamma}_{nn}^{a}=0,$$

где

$$\Gamma_{bc}^{a}=\frac{1}{2}g^{ad}\left(\vec{e}_b g_{cd}+\vec{e}_c g_{bd}-\vec{e}_d g_{bc}\right),\ \psi_a^b=g^{bc}\omega_{ac},$$

$$C_{ab}=\frac{1}{2}\partial_n g_{ab},\ C_a^b=g^{bc}C_{ac}.$$

Предложение 2. *Пусть* $N:TM\to TM$ *— эндоморфизм касательного расслоения субриманова многообразия M такой, что* $N\vec{\xi}=\vec{0}$, $N(D)\subset D$. *Тогда на многообразии M существует единственная линейная связность* ∇^N *с кручением* $S\left(X,Y\right)$, *однозначно определяемая следующими условиями:*

1) $S(X,Y)=2\omega(X,Y)\vec{\xi}+\eta(X)NY-\eta(Y)NX,\ \ X,Y,Z\in\Gamma\left(TM\right)$;

2) $\nabla^N_X Y = \nabla_X Y,\ \ X, Y \in \Gamma(D)$;

3) $\nabla^N_X \vec{\xi} = 0,\ \ X \in \Gamma(TM)$.

Определим в адаптированных координатах отличные от нуля коэффициенты связности ∇^N_X, положив

$$G^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}\left(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}\right),\ \ G^b_{na} = N^b_a.$$

Непосредственно проверяется, что определяемая тем самым связность удовлетворяет условиям предложения 1.

Из предложения 1 следует, что

$$\nabla^N_X g(Y,Z) = 0,\ \ X, Y, Z \in \Gamma(D).$$

Последнее замечание подтверждает целесообразность назвать связность ∇^N полуметрической.

Положим $\tilde{S}(X,Y,Z) = g(S(X,Y),Z),\quad X,Y,Z \in \Gamma(TM)$. В адаптированных координатах возможно, что ненулевые компоненты тензора $\tilde{S}(X,Y,Z)$ будут иметь следующий вид:

$$\tilde{S}(\vec{e}_a, \vec{e}_b, \partial_n) = 2\omega_{ab},$$

$$\tilde{S}(\vec{e}_a, \partial_n, \vec{e}_b) = -g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b),$$

$$\tilde{S}(\partial_n, \vec{e}_a, \vec{e}_b) = g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b).$$

Как видно из полученных равенств, тензор $\tilde{S}(X,Y,Z)$ кососимметричен тогда и только тогда, когда $2\omega_{ab} = g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b)$ или $2\omega_{ab} = g_{bc}N^c_a$. Отсюда получаем $N^c_a = 2g^{cb}\omega_{ab}$. Таким образом, в силу равенства $\psi^b_a = g^{bc}\omega_{ac}$ окончательно получаем: $N^c_a = 2\psi^c_a$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Линейная связность* ∇^N*, заданная на субримановом многообразии, кососимметрична тогда и только тогда, когда* $N=2\psi$.

В дальнейшем будем полагать, что для связности ∇^N выполняется условие $\mathrm{N}=2\psi$.

Теорема 2. *Линейная связность* ∇^N*, заданная на субримановом многообразии, метрическая тогда и только тогда, когда* $L_{\vec{\xi}}g=0$.

Доказательство. Из предложения 2 следует, что

$$\nabla_c^N g_{ab}=0.$$

Вычислим $\nabla_n^N g_{ab}$. Имеем

$$\nabla_c^N g_{ab}=\partial_n g_{ab}-2\psi_a^c g_{cb}+2\psi_b^c g_{ac}=\partial_n g_{ab}+2g^{cd}\omega_{da}g_{cb}+$$

$$+2g^{cd}\omega_{db}g_{ac}=\partial_n g_{ab}+2\omega_{ab}+2\omega_{ba}=\partial_n g_{ab}.$$

Будем полагать в дальнейшем, что ∇^N — метрическая связность с эндоморфизмом $\mathrm{N}=2\psi$.

Пусть $K(X,Y)Z,\quad X,Y,Z\in\Gamma(TM)$, — тензор кривизны связности ∇^N. Вычислим ненулевые компоненты тензора $K(X,Y)Z$. Имеем

$$K_{abc}^d=R_{abc}^d+4\omega_{ab}\psi_c^d,\quad K_{anc}^d=\nabla_a N_c^d.$$

Здесь $R_{abc}^d=2\vec{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^d+2\Gamma_{[a|e|}^d\Gamma_{b]c}^e$ — компоненты тензора кривизны Схоутена [3], определяемого равенством

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{P[X,Y]}Z-P\big[Q[X,Y],Z\big],$$

$Q=I-P$.

Инвариантное представление тензора $K(X,Y)Z$ имеет вид

$$K(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \eta(X)(\nabla_X N)Z - \\ -\eta(X)(\nabla_Y N)Z + 4\omega(X,Y)\psi(Z),$$

$X,Y,Z \in \Gamma(TM)$.

После необходимых вычислений в адаптированных координатах убеждаемся в справедливости следующих теорем.

Теорема 3. *N-связность с кососимметрическим кручением, заданная на субримановом многообразии контактного типа, является плоской тогда и только тогда, когда*

$$R(X,Y)Z = -4\omega(X,Y)\psi(Z), \;\; \nabla N = 0, \;\; X,Y,Z \in \Gamma(D).$$

Теорема 4. *Кручение кососимметрической линейной связности ∇^N, заданной на субримановом многообразии M, параллельно тогда и только тогда, когда $\nabla\omega = 0$, где ∇ — внутренняя метрическая связность.*

Пусть субриманово многообразие *M* является многообразием Сасаки. В этом случае имеет место равенство $\nabla\omega = 0$, что позволяет в качестве следствия теоремы 4 сформулировать теорему 5.

Теорема 5. *Кручение кососимметрической линейной связности ∇^N ($N = -2\varphi$), заданной на сасакиевом многообразии M, параллельно.*

Заключение

В настоящей работе приводится новый пример многообразия Картана — Римана [5] с кососимметрическим параллельным кручением. Таким примером служит субриманово многообразие с заданной на нем N-связностью специального вида. Пока остается нерешенной следующая интересная задача: получить классификацию эндоморфизмов $N : D \to D$, основанную на изучении алгебраической структуры тензоров кручения соответствующих N-связностей.

Список литературы

1. *Букушева А.В.* Нелинейные связности и внутренние полупульверизации на распределении с обобщенной лагранжевой метрикой // ДГМФ. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 58—63.

2. *Букушева А.В.* О геометрии контактных метрических пространств с φ-связностью // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер.: Математика. Физика. 2015. №17 (214), вып. 40. С. 20—24.

3. *Букушева А.В., Галаев С.В.* Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий // ДГМФ. Калининград, 2017. Вып. 48. С. 32—41.

4. *Галаев С.В.* О геометрии субримановых η-Эйнштейновых многообразий // ДГМФ. Калининград, 2019. Вып. 50. С. 68—81.

5. *Гордеева И.А., Паньженский В.И., Степанов С.Е.* Многообразия Римана — Картана // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2009. Т. 123. С. 110—141.

6. *Agricola I., Ferreira A.C., Friedrich Th.* The classification of naturally reductive homogeneous spaces in dimensions $n \le 6$ // Differ. Geom. Appl., 2015. Vol. 39. P. 59—92.

7. *Alexandrov B*. Sp(n)U(1)-connections with parallel totally skew-symmetric torsion // J. Geom. Phys. 2006. Vol. 57. P. 323—337.

8. *Bukusheva A.V., Galaev S.V.* Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4 (53), №2. P. 13—22.

9. *Cleyton R., Swann A*. Einstein metrics via intrinsic or parallel torsion Mathematische Zeitschrift. 2004. Vol. 247. P. 513—528.

10. *Dileo G., Lotta A.* A note on Riemannian connections with skew torsion and the de Rham splitting // Manuscripta math. 2018. Vol. 156, №3-4. P. 299—302.

11. *Friedrich Th.* G_2-manifolds with parallel characteristic torsion // Differ. Geom. Appl. 2007. Vol. 25. P. 632—648.

12. *Galaev S.V.* Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, №1. P. 71—76.

S. Galaev[1]
[1] *Saratov State University*
83 Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russia
sgalaev@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-7

Connections with parallel skew-symmetric torsion on sub-Riemannian manifolds

Submitted on May 15, 2020

On a sub-Riemannian manifold M of contact type, is considered an N-connection ∇^N defined by the pair (∇ , N), where ∇ is an interior metric connection, $N : D \to D$ is an endomorphism of the distribution D. It is proved that there exists a unique N-connection ∇^N such that its torsion is skew-symmetric as a contravariant tensor field. A construction of the endomorphism corresponding to such connection is found. The sufficient conditions for the obtained connection to be a metric connection with parallel torsion are given.

Keywords: sub-Riemannian manifold of contact type, interior connection, flat semi-metric connection with skew-symmetric torsion, Schouten tensor.

References

1. *Bukusheva, A. V.:* Nonlinear connections and internal semi-pulverization on a distribution with a generalized Lagrangian metric. DGMF. Kaliningrad. 46, 58—62 (2015).

2. *Bukusheva, A. V.:* The geometry of the contact metric spaces φ-connection. Scientific Bulletin of Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics, **17** (214):40, 20—24 (2015).

3. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* Geometry of almost contact hyperkähler manifolds. DGMF. Kaliningrad. 48, 32—41 (2017).

4. *Galaev, S. V.:* On a sub-Riemannian manifold of contact type a connection. DGMF. Kaliningrad. 50, 68—81 (2019).

5. *Gordeeva, I.A., Panzhensky, V.I., Stepanov, S.E.*: Riemann — Cartan manifolds. Itogi nauki i tekhn. Sovrem. math. and its app. Theme reviews, 123, 110—141 (2009).

6. *Agricola, I., Ferreira, A.C., Friedrich, Th.:* The classification of naturally reductive homogeneous spaces in dimensions $n \le 6$. Diff. Geom. Appl., 39, 59—92 (2015).

7. *Alexandrov, B*.: Sp(n)U(1)-connections with parallel totally skew-symmetric torsion. J. Geom. Phys., 57, 323—337 (2006).

8. *Bukusheva, A.V., Galaev, S.V.:* Almost contact metric structures defined by connection over distribution. Bull. of the Transilvania University of Brasov, Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics, **4** (53):2, 13—22 (2011).

9. *Cleyton, R., Swann, A*.: Einstein metrics via intrinsic or parallel torsion. Math. Z., 247, 513—528 (2004).

10. *Dileo, G., Lotta, A.:* A note on Riemannian connections with skew torsion and the de Rham splitting. Manuscripta Math. **156**:3-4, 299—302 (2018).

11. *Friedrich, Th.:* G_2-manifolds with parallel characteristic torsion. Diff. Geom. Appl., 25, 632—648 (2007).

12. *Galaev, S.V.:* Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures. Lobachevskii J. of Math., **39**:1, 71—76 (2018).