

**СКОМПОНОВАННЫЕ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА**

Определено скомпонованное гиперплоскостное распределение аффинного пространства A_n (SH-распределение) и доказана его теорема существования. Построены внутренние нормализации основных структурных подрасслоений SH-распределения в дифференциальных окрестностях 1-го и 2-го порядка. Введены нормальные и касательные аффинные связности основных структурных подрасслоений данного SH-распределения.

In this article, I determine the grouped hyperplane distribution of the affine space A_n (SH-distribution) and prove the relevant existence theorem. I perform internal normalizations of the main structural subbundles of the SH-distribution in first and second-order differential neighbourhoods. Normal and tangent affine connections of the main structural subbundles of the SH-distribution are introduced.

Ключевые слова: distribution, subbundle, нормализация, нормальная аффинная связность, касательная аффинная связность, соответствие Бомпьяни – Пантази.

Keywords: geometric object, distribution, subbundle, normalization, normal affine connection, tangent affine connection, Bompiani-Pantazi correspondence.

Во всей работе использована следующая схема индексов:

$$K, L = \overline{1, n}; i, j, k, l = \overline{1, m}; \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1}; \sigma, \rho, \xi, \tau = \overline{1, n-1}.$$

Знак \equiv означает сравнение по модулю базисных форм ω^K .

1. Задание скомпонованного гиперплоскостного распределения в аффинном пространстве. Теорема существования

Определение 1. Гиперплоскостное H -распределение (распределение гиперплоскостей H_{n-1}) аффинного пространства A_n , в каждом центре A которого выполняются соотношения

$$[\Lambda_m(A); L_{n-m-1}(A)] = H_{n-1}(A), \Lambda_m(A) \cap L_{n-m-1}(A) = A,$$

называется скомпонованным распределением, или кратко – SH-распределением [1–3].



Распределение m -плоскостей $\Lambda_m(A) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda(A)$ и распределение $(n - m - 1)$ -плоскостей $L_{n-m-1}(A) \stackrel{\text{def}}{=} L(A)$ назовем соответственно Λ -под-*расслоением* и L -под*расслоением* данного SH -распределения.

Изучение скомпонованных SH -распределений аффинного пространства актуально потому, что эти образы являются обобщениями регулярных гиперполос, гиперполос специальных типов и тангенциально вырожденных гиперповерхностей. Например:

а) если Λ -подрасслоение голономно, то пространство A_n расслаивается на $(n - m)$ -параметрическое семейство гиперполос $H_m(L)$, оснащенных полем плоскостей L ;

б) если Λ -подрасслоение голономно и в каждом центре A плоскость $L(A)$ является характеристикой семейства касательных гиперплоскостей, то в этом случае пространство A_n расслаивается на $(n - m)$ -параметрическое семейство гиперполос H_m [4];

в) если H -подрасслоение голономно, то пространство A_n расслаивается на однопараметрическое семейство гиперповерхностей, оснащенных полями Λ -, L -плоскостей.

Приєднадим подвижный репер $R = \{M; \bar{e}_j\}$ пространства A_n к SH -распределению следующим образом:

$$M \equiv A, \{\bar{e}_i\} \subset \Lambda(A), \{\bar{e}_\alpha\} \subset L(A), \bar{e}_n \notin H_{n-1}(A).$$

В выбранном репере нулевого порядка R_0 скомпонованное распределение SH задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_i^n &= \Lambda_{iK}^n \omega^K, \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha K}^n \omega^K, \\ \omega_i^\alpha &= \Lambda_{iK}^\alpha \omega^K, \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha K}^i \omega^K, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \nabla \Lambda_{iK}^n &= \Lambda_{iKL}^n \omega^L, \nabla \Lambda_{\alpha K}^n = \Lambda_{\alpha KL}^n \omega^L, \\ \nabla \Lambda_{iK}^\alpha + \Lambda_{iK}^n \omega_n^\alpha &= \Lambda_{iKL}^\alpha \omega^L, \nabla \Lambda_{\alpha K}^i + \Lambda_{\alpha K}^n \omega_n^i = \Lambda_{\alpha KL}^i \omega^L, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\Gamma_1 = \{\Lambda_{iK}^n, \Lambda_{\alpha K}^n, \Lambda_{iK}^\alpha, \Lambda_{\alpha K}^i\}, \Gamma_2 = \{\Gamma_1, \Lambda_{iKL}^n, \Lambda_{\alpha KL}^n, \Lambda_{iKL}^\alpha, \Lambda_{\alpha KL}^i\}, \dots -$$

последовательность фундаментальных геометрических объектов SH -распределения [5].

Имеет место теорема существования SH -распределения.

Теорема 1. В n -мерном аффинном пространстве A_n скомпонованное гиперплоскостное распределение (SH -распределение) существует с произволом $m + (2m + 1)(n - m - 1)$ функций n аргументов.

Доказательство. Действительно, чистое замыкание (2) системы (1) представим в виде

$$\nabla \Lambda_{iK}^n \wedge \omega^K = 0, \nabla \Lambda_{\alpha K}^n \wedge \omega^K = 0, \nabla \Lambda_{iK}^\alpha \wedge \omega^K = 0, \nabla \Lambda_{\alpha K}^i \wedge \omega^K = 0. \quad (3)$$



Полагая, что $m + (2m + 1)(n - m - 1) \equiv A$, находим характеры [6] системы (3):

$$S_1 = S_2 = S_3 = \dots = S_n = A.$$

Найдем далее число Картана [6] системы (3):

$$Q = S_1 + 2S_2 + 3S_3 + \dots + nS_n = \frac{n(n+1)}{2} A.$$

Разрешая систему (3) по лемме Картана [6], находим:

$$\begin{aligned} \nabla \Lambda_{iK}^n &= \Lambda_{iKL}^n \omega^L, \nabla \Lambda_{\alpha K}^n = \Lambda_{\alpha KL}^n \omega^L, \\ \nabla \Lambda_{iK}^\alpha &= \Lambda_{iKL}^\alpha \omega^L, \nabla \Lambda_{\alpha K}^i = \Lambda_{\alpha KL}^i \omega^L. \end{aligned} \quad (4)$$

Число линейно независимых функций N , стоящих в правых частях системы (4), равно $N = \frac{n(n+1)}{2} A$. Следовательно, $Q = N$ и система (2) находится в инволюции [6].

Произвол системы (2) определяется характером S_n . \square

2. Поля нормализаций Нордена основных структурных подрасслоений SH -распределения в окрестности 1-го порядка

1. Из уравнений (1), (2) следует, что совокупности функций $\{\Lambda_{\sigma\rho}^n\}$, $\{\Lambda_{ij}^n\}$, $\{\Lambda_{\alpha\beta}^n\}$ образуют невырожденные тензоры 1-го порядка:

$$\nabla \Lambda_{\sigma\rho}^n = \Lambda_{\sigma\rho K}^n \omega^K, \nabla \Lambda_{ij}^n = \Lambda_{ijk}^n \omega^K, \nabla \Lambda_{\alpha\beta}^n = \Lambda_{\alpha\beta K}^n \omega^K, \quad (5)$$

которые являются соответственно основными (главными) фундаментальными тензорами 1-го порядка H -, Λ -, L -подрасслоений данного распределения $SH \subset A_n$.

Так как тензоры $\{\Lambda_{\sigma\rho}^n\}$, $\{\Lambda_{ij}^n\}$, $\{\Lambda_{\alpha\beta}^n\}$ невырожденные, то для них рассмотрим соответственно обращенные фундаментальные тензоры 1-го порядка $\{\Lambda_n^{\sigma\rho}\}$, $\{\Lambda_n^{ij}\}$, $\{\Lambda_n^{\alpha\beta}\}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} \Lambda_{\sigma\rho}^n \Lambda_n^{\rho\tau} &= \delta_\sigma^\tau, \Lambda_{ij}^n \Lambda_n^{jk} = \delta_i^k, \Lambda_{\alpha\beta}^n \Lambda_n^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma, \\ \Lambda_{\rho\sigma}^n \Lambda_n^{\tau\rho} &= \delta_\sigma^\tau, \Lambda_{ji}^n \Lambda_n^{kj} = \delta_i^k, \Lambda_{\beta\alpha}^n \Lambda_n^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\gamma \end{aligned} \quad (6)$$

и уравнениям

$$\nabla \Lambda_n^{\sigma\rho} = \Lambda_{nK}^{\sigma\rho} \omega^K, \nabla \Lambda_n^{ij} = \Lambda_{nK}^{ij} \omega^K, \nabla \Lambda_n^{\alpha\beta} = \Lambda_n^{\alpha\beta} \omega^K. \quad (7)$$

Определение 2. Всякую инвариантную прямую $N_1(A)$ в данном центре A распределения SH назовем *нормалью 1-го рода* плоскости $H(A)$, если $N_1(A) \not\subset H(A)$, а инвариантную $(n-2)$ -плоскость $N_{n-2}(A) \subset H(A)$, $A \not\subset N_{n-2}(A)$ назовем *нормалью 2-го рода* плоскости $H(A)$.



Таким образом, нормализацию Нордена $(N_1; N_{n-2})$ H -подрасслоения [7] данного SH -распределения зададим полями объектов $\{v_n^\sigma\}$ и $\{v_\sigma\}$:

$$\nabla v_n^\sigma + \omega_n^\sigma = v_{nK}^\sigma \omega^K, \nabla v_\sigma = v_{\sigma K} \omega^K. \quad (8)$$

Введем, учитывая (8), (2), соответствие Бомпьяни – Пантази [8] между нормальными 1-го рода $\{v_n^\rho\}$ и 2-го рода $\{v_\sigma\}$ Нордена H -подрасслоения:

$$v_\sigma = \Lambda_{\sigma\rho}^n v_n^\rho + t_\sigma, \quad (9)$$

где

$$t_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{\sigma n}^n, \nabla t_\sigma = \Lambda_{\sigma\rho}^n \omega_n^\rho + t_{\sigma K} \omega^K. \quad (10)$$

Учитывая (6), разрешим уравнения (9) относительно $\{v_n^\rho\}$:

$$v_n^\sigma = \Lambda_n^{\sigma\rho} v_\rho + t_n^\sigma. \quad (11)$$

Здесь в силу формул (10), (7₁) имеем

$$t_n^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} -\Lambda_n^{\sigma\rho} t_\rho, \nabla t_n^\sigma + \omega_n^\sigma = t_{nK}^\sigma \omega^K. \quad (12)$$

Установим соответствие Бомпьяни – Пантази [8] между нормальными 1-го и 2-го рода Λ -, L -подрасслоений данного SH -распределения. Прежде всего, учитывая (1), (2), (6), (10), непосредственной проверкой убеждаемся, что функции

$$t_n^i \stackrel{\text{def}}{=} -\Lambda_n^{ij} t_j - \Lambda_n^{i\alpha} t_\alpha, t_n^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} -\Lambda_n^{\alpha\beta} t_\beta - \Lambda_n^{\alpha i} t_i$$

удовлетворяют уравнениям

$$\nabla t_n^i + \omega_n^i = t_{nK}^i \omega^K, \nabla t_n^\alpha + \omega_n^\alpha = t_{nK}^\alpha \omega^K. \quad (13)$$

Предварительно построим ряд функций 1-го порядка, дифференциальные уравнения которых найдем, используя (5–8), (10), (12):

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_i &\stackrel{\text{def}}{=} t_i + \Lambda_{i\beta}^n t_\beta, \nabla \mathfrak{T}_i \equiv \Lambda_{ij}^n \omega_n^j; \\ \mathfrak{T}_\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} t_\alpha + \Lambda_{\alpha j}^n t_j, \nabla \mathfrak{T}_\alpha \equiv \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_n^\beta; \\ \mathfrak{T}_n^i &\stackrel{\text{def}}{=} -\Lambda_n^{ij} \mathfrak{T}_j, \nabla \mathfrak{T}_n^i + \omega_n^i \equiv \mathfrak{T}_{nK}^i \omega^K; \\ \mathfrak{T}_n^\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} -\Lambda_n^{\alpha\beta} \mathfrak{T}_\beta, \nabla \mathfrak{T}_n^\alpha + \omega_n^\alpha \equiv \mathfrak{T}_{nK}^\alpha \omega^K. \end{aligned} \quad (14)$$

Соответствие Бомпьяни – Пантази между нормальными 1-го и 2-го рода Нордена Λ -, L -подрасслоений согласно соотношениям (5), (6), (8), (13), (14) принимает следующий вид:

$$v_n^i = \Lambda_n^{ij} v_j + \mathfrak{T}_n^i, v_i = \Lambda_{ij}^n v_n^j + \mathfrak{T}_i, \quad (15)$$

$$v_n^\alpha = \Lambda_n^{\alpha\beta} v_\beta + \mathfrak{T}_n^\alpha, v_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta}^n v_n^\beta + \mathfrak{T}_\alpha. \quad (16)$$



2. Поля (14) квазитензоров $\{\mathfrak{T}_n^i\}$, $\{\mathfrak{T}_n^\alpha\}$ и поле

$$\nabla \mathfrak{T}_n^\sigma + \omega_n^\sigma = \mathfrak{T}_{nK}^\sigma \omega^K \quad (17)$$

квазитензора $\{\mathfrak{T}_n^\sigma\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathfrak{T}_n^i, \mathfrak{T}_n^\alpha\}$ задают поля нормалей 1-го рода $\{\mathfrak{T}_{n-m}; \mathfrak{T}_{m+1}; \mathfrak{T}_1\}$ соответственно Λ -, L -, H -подрасслоений SH -распределения. В силу биекций (9), (15) Бомпьяни – Пантази находим поля нормалей 2-го рода Λ -, L -, H -подрасслоений:

$$\begin{aligned} t_{m-1} : \mathfrak{F}_i &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{ij}^n \mathfrak{T}_n^j + \mathfrak{T}_i, \nabla \mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_{iK} \omega^K, \\ t_{n-m-2} : \mathfrak{F}_\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{\alpha\beta}^n \mathfrak{T}_n^\beta + \mathfrak{T}_\alpha, \nabla \mathfrak{F}_\alpha = \mathfrak{F}_{\alpha K} \omega^K, \\ t_{n-2} : \mathfrak{F}_\sigma &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{\sigma\rho}^n \mathfrak{T}_n^\rho + t_\sigma, \nabla \mathfrak{F}_\sigma = \mathfrak{F}_{\sigma K} \omega^K. \end{aligned} \quad (18)$$

Согласно (2), (7) охваты [5]

$$\begin{aligned} v_n^i &= \Lambda_n^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n-m-1} \Lambda_{\alpha\beta}^i \Lambda_n^{\beta\alpha}, \\ v_n^\alpha &= \Lambda_n^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m} \Lambda_{ij}^\alpha \Lambda_n^{ji}, \\ v_n^\sigma &= \Lambda_n^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{\Lambda_n^i; \Lambda_n^\alpha\} \end{aligned}$$

удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \Lambda_n^i + \omega_n^i = \Lambda_{nK}^i \omega^K, \nabla \Lambda_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \Lambda_{nK}^\alpha \omega^K, \nabla \Lambda_n^\sigma + \omega_n^\sigma = \Lambda_{nK}^\sigma \omega^K, \quad (19)$$

которые задают поля нормалей 1-го рода $(\Lambda_{n-m}; \Lambda_{m+1}; \Lambda_1)$ в смысле Нордена соответственно Λ -, L -, H -подрасслоений данного SH -распределения.

В силу биекций (9), (15), (16) построим поля нормалей 2-го рода $(\lambda_{m-1}; \lambda_{n-m-2}; \lambda_{n-2})$ соответственно Λ -, L -, H -подрасслоений:

$$\begin{aligned} \lambda_{m-1} : \lambda_i &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{ij}^n \Lambda_n^j + \mathfrak{T}_i, \nabla \lambda_i = \lambda_{iK} \omega^K, \\ \lambda_{n-m-2} : \lambda_\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{\alpha\beta}^n \Lambda_n^\beta + \mathfrak{T}_\alpha, \nabla \lambda_\alpha = \lambda_{\alpha K} \omega^K, \\ \lambda_{n-2} : \lambda_\sigma &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{\sigma\rho}^n \Lambda_n^\rho + t_\sigma, \nabla \lambda_\sigma = \lambda_{\sigma K} \omega^K. \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. В дифференциальной окрестности 1-го порядка распределение $SH \subset A_n$ порождает внутренним инвариантным образом поля нормализаций $(\mathfrak{T}_{n-m}; t_{m-1})$, $(\mathfrak{T}_{m+1}; t_{n-m-2})$, $(\mathfrak{T}_1; t_{n-2})$ и $(\Lambda_{n-m}; \lambda_{m-1})$, $(\Lambda_{m+1}; \lambda_{n-m-2})$, $(\Lambda_1; \lambda_{n-2})$ в смысле Нордена соответственно Λ -, L -, H -подрасслоений.



3. Построение нормализаций основных структурных подрасслоений SH -распределения в дифференциальной окрестности 2-го порядка

1. Рассмотрим построение нормализаций Нордена Λ -, L -, H -подрасслоений SH -распределения в дифференциальной окрестности 2-го порядка исходя из найденных ранее полей объектов 1-го порядка $\{t_n^\sigma\}$ (12), $\{\Lambda_n^\sigma\}$ (19з), $\{\mathfrak{A}_n^\sigma\}$ (17).

Продолжая уравнение (12) и полагая $K = \rho$ и $K = n$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \nabla t_{np}^\sigma + (t_n^\sigma \Lambda_{\tau p}^n + t_n^\xi \Lambda_{\xi p}^n \delta_\tau^\sigma) \omega_n^\tau &\equiv 0, \\ \nabla t_{nn}^\sigma - (t_{nt}^\sigma - t_n^\sigma \Lambda_{tn}^n - t_n^\xi \Lambda_{\xi n}^n \delta_\tau^\sigma) \omega_n^\tau &\equiv 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Введем а рассмотрение функции 2-го порядка

$$H_{np}^\sigma = t_{np}^\sigma - \Lambda_{\xi p}^n t_n^\xi t_n^\sigma, \quad (21)$$

которые в силу (5), (12), (20) удовлетворяют уравнениям

$$\nabla H_{np}^\sigma \equiv 0.$$

В общем случае тензор $\{H_{np}^\sigma\}$ 2-го порядка (21) невырожден и, следовательно, для него существует обратный тензор $\{\tilde{H}_\sigma^{np}\}$:

$$H_{n\xi}^\sigma \tilde{H}_\rho^{n\xi} = \delta_\rho^\sigma, \quad H_{np}^\xi \tilde{H}_\xi^{np} = \delta_\rho^\sigma, \quad \nabla \tilde{H}_\sigma^{np} \equiv 0.$$

Далее построим квазитензор 2-го порядка

$$\mathfrak{A}_n^\rho = -\tilde{H}_\sigma^{np} H_{nn}^\sigma, \quad \nabla \mathfrak{A}_n^\rho + \omega_n^\rho = \mathfrak{A}_{nK}^\rho \omega^K, \quad (22)$$

где

$$H_{nn}^\sigma = t_{nn}^\sigma - t_p t_n^\sigma t_n^\rho, \quad \nabla H_{nn}^\sigma \equiv H_{np}^\sigma \omega_n^\rho. \quad (23)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции $\{\mathfrak{A}_n^i\}$, $\{\mathfrak{A}_n^\alpha\}$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \mathfrak{A}_n^i + \omega_n^i = \mathfrak{A}_{nK}^i \omega^K, \quad \nabla \mathfrak{A}_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \mathfrak{A}_{nK}^\alpha \omega^K, \quad (24)$$

то есть являются подобъектами объекта $\{\mathfrak{A}_n^\rho\} = \{\mathfrak{A}_n^i; \mathfrak{A}_n^\alpha\}$. Поля квазитензоров $\{\mathfrak{A}_n^\rho\}$ (22), $\{\mathfrak{A}_n^i\}$ (24), $\{\mathfrak{A}_n^\alpha\}$ (24) задают соответственно поля нормалей $(\mathfrak{A}_1; \mathfrak{A}_{n-m}; \mathfrak{A}_{m+1})$ 1-го рода H -, Λ -, L -подрасслоений SH -распределения в дифференциальной окрестности 2-го порядка.

В силу биекций Бомпьяни – Пантази (9), (15), (16) находим поля нормалей 2-го рода H -, Λ -, L -подрасслоений SH -распределения, соответствующие полям нормалей 1-го рода этих подрасслоений:



$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{n-2} : \mathcal{A}_\sigma &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{\sigma\rho}^n \mathfrak{A}_n^\rho + t_\sigma, \nabla \mathcal{A}_\sigma = \mathcal{A}_{\sigma K} \omega^K, \\
\mathcal{A}_{m-1} : \mathcal{A}_i &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{ij}^n \mathfrak{A}_n^j + \mathfrak{T}_i, \nabla \mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{iK} \omega^K, \\
\mathcal{A}_{n-m-2} : \mathcal{A}_\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{\alpha\beta}^n \mathfrak{A}_n^\beta + \mathfrak{T}_\alpha, \nabla \mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}_{\alpha K} \omega^K.
\end{aligned} \tag{25}$$

Резюмируя результаты этого пункта, приходим к выводу:

Теорема 3. Поля нормализаций $(\mathfrak{A}_1; \mathcal{A}_{n-2})$, $(\mathfrak{A}_{n-m}; \mathcal{A}_{m-1})$, $(\mathfrak{A}_{m+1}; \mathcal{A}_{n-m-2})$ Нордена H -, Λ -, L -подрасслоений SH -распределения внутренним инвариантным образом определены в дифференциальной окрестности 2-го порядка.

2. Пусть задано поле (19₃) нормалей 1-го рода λ_1 H -подрасслоения. Следуя построениям (18–25) (см. п. 1) последовательно получаем:

$$\begin{aligned}
\nabla \Lambda_{np}^\sigma + (\Lambda_{np}^\sigma \Lambda_{\tau\rho}^n + \Lambda_{np}^\xi \Lambda_{\xi\rho}^n \delta_\tau^\sigma) \omega_n^\tau &\equiv 0, \\
\nabla \Lambda_{nm}^\sigma - (\Lambda_{np}^\sigma - \Lambda_{np}^\tau t_\rho - t_\xi \Lambda_{np}^\xi \delta_\rho^\sigma) \omega_n^\rho &\equiv 0, \\
B_{np}^\sigma &= \Lambda_{np}^\sigma - \Lambda_{\xi\rho}^\sigma \Lambda_{np}^\xi \Lambda_n^\sigma, \nabla B_{np}^\sigma \equiv 0, \\
B_{n\xi}^\sigma \tilde{B}_\rho^{n\xi} &= \delta_\rho^\sigma, B_{np}^\tau \tilde{B}_\tau^{n\sigma} = \delta_\rho^\sigma, \nabla \tilde{B}_\rho^{n\sigma} \equiv 0, \\
B_{nm}^\sigma &= \Lambda_{nm}^\sigma - t_\rho \Lambda_{np}^\rho \Lambda_n^\sigma, \nabla B_{nm}^\sigma \equiv B_{np}^\sigma \omega_n^\rho.
\end{aligned} \tag{26}$$

$$B_{nm}^\sigma = \Lambda_{nm}^\sigma - t_\rho \Lambda_{np}^\rho \Lambda_n^\sigma, \nabla B_{nm}^\sigma \equiv B_{np}^\sigma \omega_n^\rho. \tag{27}$$

Согласно уравнениям (26), (27) определяем, что совокупность функций

$$\mathfrak{B}_n^\rho = -\tilde{B}_\sigma^{n\rho} B_{nm}^\sigma, \nabla \mathfrak{B}_n^\rho + \omega_n^\rho = \mathfrak{B}_{nK}^\rho \omega^K \tag{28}$$

образует квазитензор 2-го порядка. Из (28) следует, что величины $\{\mathfrak{B}_n^i\}$, $\{\mathfrak{B}_n^\alpha\}$ также являются квазитензорами 2-го порядка. В силу биекций Бомпьяни – Пантази (9), (15), (16) квазитензорам $\{\mathfrak{B}_n^\sigma\}$, $\{\mathfrak{B}_n^i\}$, $\{\mathfrak{B}_n^\alpha\}$ поставим в соответствие тензоры 2-го порядка

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_\sigma &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{\sigma\rho}^n \mathfrak{B}_n^\rho + t_\sigma, \nabla \mathcal{B}_\sigma = \mathcal{B}_{\sigma K} \omega^K, \\
\mathcal{B}_i &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{ij}^n \mathfrak{B}_n^j + \mathfrak{T}_i, \nabla \mathcal{B}_i = \mathcal{B}_{iK} \omega^K, \\
\mathcal{B}_\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{\alpha\beta}^n \mathfrak{B}_n^\beta + \mathfrak{T}_\alpha, \nabla \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_{\alpha K} \omega^K,
\end{aligned} \tag{29}$$

поля (29) которых задают поля нормалей 2-го рода $(\mathcal{B}_{n-2}; \mathcal{B}_{m-1}; \mathcal{B}_{n-m-2})$ Нордена соответственно H -, Λ -, L -подрасслоений SH -распределения.

Следовательно, имеет место

Теорема 4. SH -распределение внутренним инвариантным образом порождает поля нормализаций $(\mathfrak{B}_1; \mathcal{B}_{n-2})$, $(\mathfrak{B}_{n-m}; \mathcal{B}_{m-1})$, $(\mathfrak{B}_{m+1}; \mathcal{B}_{n-m-2})$ Нордена его структурных H -, Λ -, L -подрасслоений в дифференциальной окрестности 2-го порядка.



3. Аналогично (см. п. 1 и 2 этого раздела) проведем построение нормализаций Нордена H -, Λ -, L -подрасслоений, исходя из задания поля нормалей 1-го рода (17) H -подрасслоения. Таким образом, получаем следующую последовательность уравнений:

$$\begin{aligned} \nabla \mathfrak{F}_{np}^\sigma + (\mathfrak{F}_n^\sigma \Lambda_{\tau\rho}^n + \Lambda_{\xi\rho}^n \mathfrak{F}_n^\xi \delta_\tau^\sigma) \omega_n^\tau &\equiv 0, \\ \nabla \mathfrak{F}_{nn}^\sigma - (\mathfrak{F}_{n\tau}^\sigma - \mathfrak{F}_n^\sigma t_\tau - t_\xi \mathfrak{F}_n^\xi \delta_\tau^\sigma) \omega_n^\tau &\equiv 0, \\ C_{np}^\sigma &\stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{F}_{np}^\sigma - \Lambda_{\xi\rho}^\sigma \mathfrak{F}_n^\xi \mathfrak{F}_n^\sigma, \nabla C_{np}^\sigma \equiv 0, \\ C_{n\xi}^\sigma \tilde{C}_\rho^{n\xi} &= \delta_\rho^\sigma, C_{np}^\tau \tilde{C}_\tau^{n\sigma} = \delta_\rho^\sigma, \nabla \tilde{C}_\rho^{n\xi} \equiv 0, \\ C_{nn}^\sigma &\stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{F}_{nn}^\sigma - t_\xi \mathfrak{F}_n^\xi \mathfrak{F}_n^\sigma, \nabla C_{nn}^\sigma \equiv C_{np}^\sigma \omega_n^\rho, \\ C_n^\rho &\stackrel{\text{def}}{=} -\tilde{C}_n^{np} C_{nn}^\sigma, \nabla C_n^\rho + \omega_n^\rho \equiv C_{nK}^\rho \omega^K, \\ C_n^i + \omega_n^i &= C_{nK}^i \omega^K, \nabla C_n^\alpha + \omega_n^\alpha \equiv C_{nK}^\alpha \omega^K. \end{aligned} \quad (30)$$

$$C_n^i + \omega_n^i = C_{nK}^i \omega^K, \nabla C_n^\alpha + \omega_n^\alpha \equiv C_{nK}^\alpha \omega^K. \quad (31)$$

Поля (30), (31) объектов $\{C_n^\sigma\}$, $\{C_n^i\}$, $\{C_n^\alpha\}$ задают соответственно поля нормалей 1-го рода $(C_1; C_{n-m}; C_{m+1})$ H -, Λ -, L -подрасслоений, которым в биекции Бомпьяни – Пантази соответствуют поля нормалей 2-го рода H -, Λ -, L -подрасслоений:

$$\begin{aligned} C_{n-2} : C_\sigma &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{\sigma\rho}^n C_n^\rho + t_\sigma, \nabla C_\sigma = C_{\sigma K} \omega^K, \\ C_{m-1} : C_i &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{ij}^n C_n^j + \mathfrak{F}_i, \nabla C_i = C_{iK} \omega^K, \\ C_{n-m-2} : C_\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{\alpha\beta}^n C_n^\beta + \mathfrak{F}_\alpha, \nabla C_\alpha = C_{\alpha K} \omega^K. \end{aligned}$$

В результате приходим к выводу.

Теорема 5. *Нормализации $(C_1; c_{n-2})$, $(C_{n-m}; c_{m-1})$, $(C_{m+1}; c_{n-m-2})$ Нордена H -, Λ -, L -подрасслоений внутренним инвариантным образом определены в дифференциальной окрестности 2-го порядка элемента SH -распределения.*

4. Задание нормальных и касательных аффинных связностей на оснащенном SH -распределении

1. Адаптируем репер R_0 полю нормалей $N_1(A)$ 1-го рода H -подрасслоения данного SH -распределения, выбирая вектор $\bar{e}_n \parallel N_1(A)$. В этом случае

$$\omega_n^i = \Lambda_{nK}^i \omega^K, \omega_n^\alpha = \Lambda_{nK}^\alpha \omega^K, \quad (32)$$

а поле нормалей 1-го рода $N_1(A)$ H -подрасслоения определяется уравнениями

$$\nabla \Lambda_{nK}^i \equiv 0, \nabla \Lambda_{nK}^\alpha \equiv 0. \quad (33)$$



Репер, в котором выполняются условия (32), (33), является репером 1-го порядка R_1 [5]. Относительно репера R_1 уравнения (1), (2), (32), (33) задают скомпонованное распределение $SH \subset A_n$, оснащенное полем нормалей 1-го рода $N_1(A)$ порядка $t \geq 2$.

При фиксации точки $A = x$ (центра SH -распределения) плоскости

$$T_{n-1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} H_{n-1}(x), T_m(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_m(x), T_{n-m-1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} L_{n-m-1}(x),$$

$$N_1(x), N_{n-m}(x) \stackrel{\text{def}}{=} [N_1; L_{n-m-1}], N_{m+1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} [N_1; \Lambda_m]$$

остаются неподвижными. Следовательно, SH -распределение порождает нормальные

$$N_1(A_n), N_{n-m}(A_n), N_{m+1}(A_n)$$

и касательные

$$T_{n-1}(A_n), T_m(A_n), T_{n-m-1}(A_n)$$

подрасслоения [9].

Структурные уравнения касательного расслоения $T_{n-1}(A_n)$ в силу формул (1), (2), (32), (33) имеют следующий вид:

$$d\omega^K = \omega^L \wedge \omega_L^K, d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \Omega_j^i, d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \Omega_\alpha^\beta,$$

$$d\omega_\alpha^i = \omega_\alpha^\sigma \wedge \omega_\sigma^i + \Omega_\alpha^i, d\omega_i^\alpha = \omega_i^\sigma \wedge \omega_\sigma^\alpha + \Omega_i^\alpha,$$

где

$$\Omega_j^i = (\Lambda_{j[L}^n \Lambda_{|n|K]}^i + \Lambda_{j[L}^\alpha \Lambda_{|\alpha|K]}^i) \omega^L \wedge \omega^K = R_{jLK}^i \omega^L \wedge \omega^K,$$

$$\Omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^n \wedge \omega_n^\beta + \omega_\alpha^i \wedge \omega_i^\beta =$$

$$= (\Lambda_{\alpha[L}^n \Lambda_{|n|K]}^\beta + \Lambda_{\alpha[L}^i \Lambda_{|\beta|K]}^\beta) \omega^L \wedge \omega^K = R_{\alpha LK}^\beta \omega^L \wedge \omega^K, \quad (34)$$

$$\Omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha[L}^n \Lambda_{|n|K]}^i \omega^L \wedge \omega^K = R_{\alpha LK}^i \omega^L \wedge \omega^K,$$

$$\Omega_i^\alpha = \Lambda_{i[L}^n \Lambda_{|n|K]}^\alpha \omega^L \wedge \omega^K = R_{iLK}^\alpha \omega^L \wedge \omega^K,$$

$$R_{jLK}^i = \Lambda_{j[L}^n \Lambda_{|n|K]}^i + \Lambda_{j[L}^\alpha \Lambda_{|\alpha|K]}^i,$$

$$R_{\alpha LK}^\beta = \Lambda_{\alpha[L}^n \Lambda_{|n|K]}^\beta + \Lambda_{\alpha[L}^i \Lambda_{|\beta|K]}^\beta, \quad (35)$$

$$R_{\alpha LK}^i = \Lambda_{\alpha[L}^n \Lambda_{|n|K]}^i,$$

$$R_{iLK}^\alpha = \Lambda_{i[L}^n \Lambda_{|n|K]}^\alpha.$$

Определение 3. Следуя работам [5; 9], делаем вывод, что в касательном расслоении $T_{n-1}(A_n)$ (H -подрасслоении) возникает аффинная связность γ без кручения с формами связности $\{\omega^K; \omega_\rho^\sigma\}$. Эту связность назовем *касательной аффинной связностью* γ оснащенного SH -распределения.



Теорема 6. В дифференциальной окрестности порядка $t \geq 2$ в касательном расслоении $T_{n-1}(A_n)$ (H -подрасслоении) оснащенное SH -распределение индуцирует касательную аффинную связность γ с формами связности $\{\omega^K; \omega_p^\sigma\}$ и 2-формами кривизны (34). Компоненты тензора кривизны $R_{\alpha L K}^p = \{R_{\alpha L K}^\beta; R_{j L K}^i; R_{\alpha L K}^i; R_{i L K}^\alpha\}$ касательной аффинной связности γ имеют строение (35).

Структурные уравнения нормального расслоения $N_1(A_n)$ (расслоения нормалей 1-го рода $N_1(A)$ H -подрасслоения) с учетом уравнений (1), (2), (32) можно представить в виде

$$d\omega_n^n = \Omega_n^n,$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_n^n &= \omega_n^i \wedge \omega_i^n + \omega_n^\alpha \wedge \omega_\alpha^n = \\ &= (\Lambda_{n[L}^i \Lambda_{|i|K]}^n + \Lambda_{n[L}^\alpha \Lambda_{|\alpha|K]}^n) \omega^L \wedge \omega^K = R_{nLK}^n \omega^L \wedge \omega^K, \end{aligned} \quad (36)$$

$$R_{nLK}^n = \Lambda_{n[L}^i \Lambda_{|i|K]}^n + \Lambda_{n[L}^\alpha \Lambda_{|\alpha|K]}^n. \quad (37)$$

Определение 4. Согласно работе [9] в нормальном расслоении $N_1(A_n)$ возникает центроаффинная связность γ^\perp с формой связности $\{\omega_n^n\}$ и 2-формой кривизны Ω_n^n (36), которую назовем *нормальной аффинной связностью* γ^\perp .

Теорема 7. В дифференциальной окрестности порядка $t \geq 2$ оснащенное SH -распределение индуцирует в расслоении $N_1(A_n)$ нормалей 1-го рода $N_1(A)$ H -подрасслоения нормальную аффинную связность γ^\perp с формой связности $\{\omega_n^n\}$ и 2-формой кривизны (36), компоненты тензора кривизны R_{nLK}^n которой имеют строение (37).

2. Аналогично (см. предыдущий п. 1) можно построить нормальную аффинную связность η^\perp (центроаффинную связность) в расслоении $N_{n-m}(A_n)$ нормалей 1-го рода базисного Λ -подрасслоения SH -распределения.

Структурные уравнения нормального расслоения $N_{n-m}(A_n)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} d\omega_\alpha^\beta &= \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \Omega_\alpha^\beta, \\ d\omega_\alpha^n &= \omega_\alpha^n \wedge \omega_n^n + \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^n + \omega_\alpha^i \wedge \omega_i^n = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^n + \Omega_\alpha^n, \\ d\omega_n^\alpha &= \omega_n^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \Omega_n^\alpha, \quad d\omega_n^n = \Omega_n^n, \end{aligned}$$



где

$$\begin{aligned}
 \Omega_\alpha^\beta &= \omega_\alpha^n \wedge \omega_n^\beta + \omega_\alpha^i \wedge \omega_i^\beta = \\
 &= (\Lambda_{\alpha[L]L}^n \Lambda_{|n|K}^\beta + \Lambda_{\alpha[L]L}^i \Lambda_{|i|K}^\beta) \omega^L \wedge \omega^K = R_{\alpha LK}^\beta \omega^L \wedge \omega^K, \\
 \Omega_n^\alpha &= \Lambda_{\alpha[L]L}^i \Lambda_{|i|K}^\alpha \omega^L \wedge \omega^K = R_{nLK}^\alpha \omega^L \wedge \omega^K, \\
 \Omega_\alpha^n &= \Lambda_{\alpha[L]L}^i \Lambda_{|i|K}^n \omega^L \wedge \omega^K = R_{\alpha LK}^n \omega^L \wedge \omega^K, \\
 \Omega_n^n &= (\Lambda_{n[L]L}^i \Lambda_{|i|K}^n + \Lambda_{n[L]L}^\alpha \Lambda_{|\alpha|K}^n) \omega^L \wedge \omega^K = R_{nLK}^n \omega^L \wedge \omega^K,
 \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\alpha LK}^\beta &= \Lambda_{\alpha[L]L}^n \Lambda_{|n|K}^\beta + \Lambda_{\alpha[L]L}^i \Lambda_{|i|K}^\beta, \\
 R_{nLK}^\alpha &= \Lambda_{n[L]L}^i \Lambda_{|i|K}^\alpha, \quad R_{\alpha LK}^n = \Lambda_{\alpha[L]L}^i \Lambda_{|i|K}^n, \\
 R_{nLK}^n &= \Lambda_{n[L]L}^i \Lambda_{|i|K}^n + \Lambda_{n[L]L}^\alpha \Lambda_{|\alpha|K}^n.
 \end{aligned} \tag{39}$$

15

Теорема 8. В дифференциальной окрестности порядка $t \geq 2$ оснащенное SH -распределение индуцирует в расслоении $N_{n-m}(A_n)$ нормалей 1-го рода Λ -подрасслоения нормальную (центроаффинную) связность η^\perp с формами связности $\{\omega_\alpha^i\}$ и 2-формами кривизны (38). Компоненты тензора кривизны $R_{\alpha LK}^\beta$ связности η^\perp имеют строение (39).

Структурные уравнения касательного расслоения $T_m(A_n)$ (Λ -подрасслоения) с учетом уравнений (1), (2), (32) можно представить в виде

$$d\omega^K = \omega^L \wedge \omega_L^K, \quad d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \Omega_j^i,$$

где

$$\begin{aligned}
 \Omega_j^i &= (\Lambda_{j[L]L}^\alpha \Lambda_{|\alpha|K}^i + \Lambda_{j[L]L}^n \Lambda_{|n|K}^i) \omega^L \wedge \omega^K = \\
 &= R_{jLK}^i \omega^L \wedge \omega^K,
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$R_{jLK}^i = \Lambda_{j[L]L}^\alpha \Lambda_{|\alpha|K}^i + \Lambda_{j[L]L}^n \Lambda_{|n|K}^i. \tag{41}$$

Теорема 9. Оснащенное SH -распределение в дифференциальной окрестности порядка $t \geq 2$ индуцирует внутреннюю нормальную аффинную связность η в касательном расслоении $T_m(A_n)$ с формами связности $\{\omega^K, \omega_j^i\}$ и 2-формами кривизны (40). Компоненты тензора кривизны R_{jLK}^i связности η имеют строение (41).

3. Построим связность \mathcal{G}^\perp в расслоении $N_{m+1}(A_n)$ нормалей 1-го рода L -подрасслоения данного SH -распределения. Структурные уравнения нормального расслоения $N_{m+1}(A_n)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 d\omega_j^i &= \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \Omega_j^i, \quad d\omega_n^n = \Omega_n^n, \\
 d\omega_n^i &= \omega_n^j \wedge \omega_j^i + \Omega_n^i, \quad d\omega_i^n = \omega_i^j \wedge \omega_j^n + \Omega_i^n,
 \end{aligned}$$



где

$$\begin{aligned}\Omega_j^i &= (\Lambda_{j[L}\Lambda_{|n|K]}^i + \Lambda_{j[L}\Lambda_{|\alpha|K]}^i)\omega^L \wedge \omega^K = R_{jLK}^i \omega^L \wedge \omega^K, \\ \Omega_n^i &= \Lambda_{n[L}\Lambda_{|\alpha|K]}^i \omega^L \wedge \omega^K = R_{nLK}^i \omega^L \wedge \omega^K, \\ \Omega_i^n &= \Lambda_{i[L}\Lambda_{|\gamma|K]}^n \omega^L \wedge \omega^K = R_{iLK}^n \omega^L \wedge \omega^K,\end{aligned}\quad (42)$$

$$\begin{aligned}\Omega_n^n &= (\Lambda_{n[L}\Lambda_{|i|K]}^n + \Lambda_{n[L}\Lambda_{|\alpha|K]}^n)\omega^L \wedge \omega^K = R_{nLK}^n \omega^L \wedge \omega^K, \\ R_{jLK}^i &= \Lambda_{j[L}\Lambda_{|n|K]}^i + \Lambda_{j[L}\Lambda_{|n|K]}^i, \\ R_{nLK}^i &= \Lambda_{n[L}\Lambda_{|\alpha|K]}^i, \quad R_{iLK}^n = \Lambda_{i[L}\Lambda_{|\alpha|K]}^n, \\ R_{nLK}^n &= \Lambda_{n[L}\Lambda_{|i|K]}^n + \Lambda_{n[L}\Lambda_{|\alpha|K]}^n.\end{aligned}\quad (43)$$

Теорема 10. Оснащенное SH -распределение индуцирует внутреннюю нормальную аффинную связность \mathfrak{S}^\perp в расслоении $N_{m+1}(A_n)$ нормалей 1-го рода L -подрасслоения с формами связности $\{\omega_j^i\}$ и 2-формой кривизны $\{\Omega_j^i\}$ (42). Компоненты тензора кривизны R_{jLK}^i имеют строение (43).

Структурные уравнения касательного расслоения $T_{n-m-1}(A_n)$ (L -подрасслоения) имеют вид

$$d\omega^K = \omega^L \wedge \omega_L^K, \quad d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \Omega_\alpha^\beta,$$

где

$$\Omega_\alpha^\beta = (\Lambda_{\alpha[L}\Lambda_{|n|K]}^\beta + \Lambda_{\alpha[L}\Lambda_{|\gamma|K]}^\beta)\omega^L \wedge \omega^K = R_{\alpha LK}^\beta \omega^L \wedge \omega^K, \quad (44)$$

$$R_{\alpha LK}^\beta = \Lambda_{\alpha[L}\Lambda_{|n|K]}^\beta + \Lambda_{\alpha[L}\Lambda_{|\gamma|K]}^\beta. \quad (45)$$

Теорема 11. В дифференциальной окрестности порядка $t \geq 2$ оснащенное SH -распределение индуцирует внутреннюю аффинную связность \mathfrak{S} в касательном расслоении $T_{n-m-1}(A_n)$ (L -подрасслоении) с формами связности $\{\omega^K, \omega_\alpha^\beta\}$ и 2-формами кривизны (44). Компоненты тензора кривизны $R_{\alpha LK}^\beta$ связности \mathfrak{S} имеют строение (45).

Список литературы

1. Попов Ю.И. О проективно-дифференциальной геометрии двухсоставного гиперполосного распределения $H_{m,n-1}^t$ // Тез. докл. 7-й Всесоюзной конф. по современным проблемам геометрии. Минск, 1979. С. 160.

2. Попов Ю.И. Скомпонованные трехсоставные распределения проективно-го пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1989. Вып. 20. С. 73–96.

3. Попов Ю.И. Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства. СПб., 1992.

4. Попов Ю.И. Регулярные гиперполосы аффинного пространства : учебное пособие. Калининград, 2011.



5. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Московского математического общества. 1953. Т. 2. С. 275–382.

6. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л., 1948.

7. Норден А. П. Пространства аффинной связности. М., 1976.

8. Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М. Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. Геом. семинара. ВИНТИ АН СССР. М., 1971. Т. 3. С. 49–94.

9. Чакмазян А. В. Нормальная связность в геометрии подмногообразий. Ереван, 1990.

Об авторе

17

Юрий Иванович Попов – канд. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

The author

Prof. Yuri I. Popov, I. Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru