УДК 514.75

М. А. Чешкова
Алтайский государственный университет, Барнаул
cma@math.asu.ru, cma41@yandex.ru

К геометрии односторонней поверхности

Пусть вдоль замкнутой кривой на поверхности обносится нормальный вектор. Если при возвращении в исходную точку направление нормали совпадает с исходным, независимо от выбора кривой, то поверхность называется двусторонней. В противном случае имеем одностороннюю поверхность. Простейшей односторонней поверхностью является лист Мёбиуса. К односторонним поверхностям относятся также бутылка Клейна и скрещенный колпак. В евклидовом пространстве E^3 рассматриваются эти поверхности. В процессе исследования используется система компьютерной математики *Maple*.

Ключевые слова: скрещенный колпак, лист Мёбиуса, бутылка Клейна, периодические функции, 2-листное накрывающее отображение.

Пусть вдоль замкнутой кривой на поверхности обносится нормальный вектор. Если при возвращении в исходную точку направление нормали совпадает с исходным, независимо от выбора кривой, то поверхность называется двусторонней. В противном случае имеем одностороннюю поверхность.

Впервые уравнение односторонней поверхности, открытой Мёбиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мёбиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2]. В [3—6] изучаются односторонние поверхности.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную 4π - периодической вектор-функцией $\rho = \rho(u)$, которая не является 2π -периодической и 2π -антипериодической.

Так как $\rho(u) = \rho(u + 4\pi)$, то вектор-функция

$$s(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) + \rho_1(u)), \text{ где } \rho_1(u) = \rho(u + 2\pi)$$

есть 2π -периодическая не равная нулю, а вектор-функция $l(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) - \rho_1(u))$ есть 2π -антипериодическая не равная нулю.

Определим поверхность M уравнением

$$r(u, v) = s(u) + vl(u), \tag{1}$$

$$u = -\pi, ..., \pi; \ v = -1, ..., 1.$$

Теорема 1. *Поверхность M есть модель листа Мёбиуса, для которого кривая $\rho = \rho(u)$ есть край.*

Доказательство. Рассмотрим поверхность M как фактор-пространство [7, с. 5]

$$SM^* = [-\pi, \pi] \times [-1,1] / [(-\pi, -v) \approx (\pi, v)].$$

Так как

$$r(-\pi, -v) = s(-\pi) - vl((-\pi), \ s(-\pi) = s(\pi), l(-\pi) = -l(\pi),$$

то имеем $r(\pi, v) = r(-\pi, -v)$. Следовательно, поверхность M есть модель листа Мёбиуса.

Определим поверхность P уравнением

$$r(u, v) = (1 + \cos(v))s(u) + \sin(v)l(u), \tag{2}$$

$$u = -\pi, ..., \pi; \ v = -\pi, ..., \pi.$$

Теорема 2. *Поверхность P есть модель проективной плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим проективную плоскость как фактор-пространство [7, с. 75]

$$SP^* = [-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]/[(-\pi,-v)\approx(\pi,v),(-u,-\pi)\approx(u,\pi)].$$

Так как

$$r(\pi,v) = (1+\cos(v))s(\pi)+\sin(v)l(\pi),$$

$$r(-\pi,-v) = ((1+\cos(v))s(-\pi)+\sin(-v)l(-\pi),$$

$$s(-\pi) = s(\pi), l(-\pi) = -l(\pi),$$

$$r(-u,-\pi) = (1+\cos(\pi))s(-u)+\sin(-\pi)l(-u) = 0,$$

$$r(u,\pi) = (1+\cos(\pi))s(u)+\sin(\pi)l(u) = 0,$$

то имеем $r(\pi,v) = r(-\pi,-v), r(u,\pi) = r(-u,-\pi)$.

Следовательно, поверхность P есть модель проективной плоскости.

Определим поверхность K уравнением

$$r(u,v) = (p+\cos(v))s(u)+\sin(v)l(u), p>1, \tag{3}$$

$$u = -\pi, ..., \pi;\ v = -\pi, ..., \pi.$$

Теорема 3. *Поверхность* K *есть модель бутылки Клейна.*

Доказательство. Рассмотрим бутылку Клейна как фактор-пространство [7, с. 75]

$$SK^* = [-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]/[(-\pi,-v)\approx(\pi,v),(u,-\pi)\approx(u,\pi)]$$

Действительно,

$$r(-\pi,-v) = (p+\cos(v))s(-u)+\sin(-\pi)l(-v) = r(\pi,v),$$

$$r(u,-\pi) = (p-1)s(u) = r(u,\pi).$$

Локально тривиальное расслоение $\zeta = (E,\pi,B)$, где B — база, E — тотальное пространство, $\pi : E \to B$ — проекция, называется k -листным накрытием, если слой $\pi^{-1}b,\ b \in B$ состоит из k точек. Тотальное пространство E называется пространством накрытия [8, с. 34].

Всякая односторонняя поверхность имеет в качестве двулистной накрывающей некоторую двустороннюю поверхность.

Рассмотрим лист Мёбиуса (1) и цилиндр

$$r(u,v) = e(u) + vk, e(u) = (\cos(u), \sin(u), 0). \quad (4)$$

Соответствие между точками листа Мёбиуса и цилиндра установим по принципу равенства координат (u,v). Координаты $(u_0, v_0), (u_0 + 2\pi, v_0)$ определяют одну точку цилиндра и две точки листа Мёбиуса. Цилиндр двулистно накрывает лист Мёбиуса.

Аналогично рассуждая, получим, что сфера

$$r(u,v) = \cos(v)e(u) + \sin(v)k, e(u) = (\cos(u), \sin(u), 0) \quad (5)$$

двулистно накрывает проективную плоскость (2), а тор

$$\begin{aligned} r(u,v) &= (p+1)\cos(v)e(u) + \sin(v)k, \\ e(u) &= (\cos(u), \sin(u), 0),\ p > 1 \end{aligned} \quad (6)$$

двулистно накрывает бутылку Клейна (3).

Построим эти поверхности.

1. *Лист Мёбиуса.* Положим

$$\begin{aligned} &s(u) = (3\cos(u), 3\sin(u), 0), l(u) = \\ &= (\sin(u/2), 0, \cos(u/2)), \rho(u) = \\ &= (3\cos(u) + \sin(u/2), 3\sin(u), \cos(u/2)). \end{aligned}$$

Построим лист Мёбиуса (рис. 1). Рассмотрим кривую на цилиндре (4)

$$\sigma : r = r(\pi/3, v), \quad v = 0, ..., 1$$

(половинка образующей цилиндра) (рис. 1). Ей соответствует образующая листа Мёбиуса (1).

Образующей цилиндра

$$\sigma^* : r = r(\pi/3, v), \;\; v = -1, ..., 1$$

соответствует образующая листа Мёбиуса, взятая дважды.

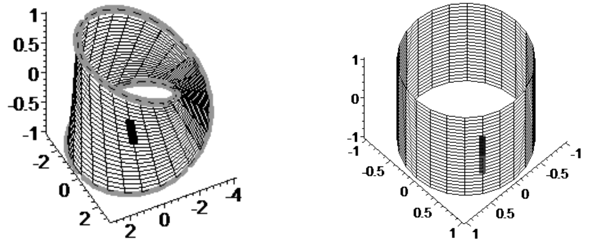

Рис. 1. Лист Мёбиуса и цилиндр

2. *Скрещенный колпак и сфера.* Положим

$$s(u) = (\cos(u), \sin(u), 0), l(u) =$$
$$= (\sin(u/2), 0, \cos(u/2)), \rho(u) =$$
$$= (\cos(u) + \sin(u/2), \sin(u), \cos(u/2)).$$

Построим модель проективной плоскости (2) (скрещенный колпак с крышкой) (рис. 2). Рассмотрим кривую на скрещенном колпаке $\sigma : r = r(\pi/3, v), v = 0, ..., \pi/2$. Ей соответствует две кривые сферы

$$\sigma^* : r = r(\pi/3, v), v = 0, ..., \pi/2,$$
$$\sigma^{**} : r = r(\pi/3 + 2\pi, -v), v = 0, ..., \pi/2.$$

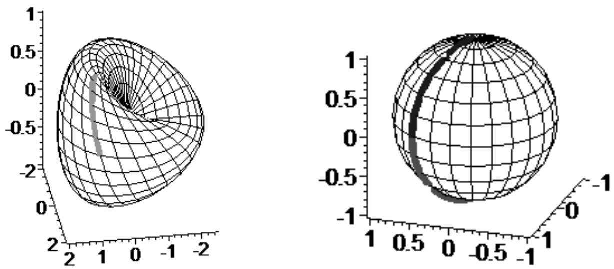

Рис. 2. Скрещенный колпак и сфера

3. Бутылка Клейна. Положим

$$s(u) = (3\cos(u), 3\sin(u), 0), l(u) =$$
$$= (\sin(u/2), 0, \cos(u/2)), \rho(u) =$$
$$= (3\cos(u) + \sin(u/2), 3\sin(u), \cos(u/2)). p = 8.$$

Построим бутылку Клейна (рис. 3). Рассмотрим кривую на бутылке Клейна $\sigma : r = r(\pi/3, v), \quad v = 0, ..., \pi/2$. Ей соответствует две кривые тора

$$\sigma^* : r = r(\pi/3, v), v = 0, ..., \pi/2,$$
$$\sigma^{**} : r = r(\pi/3 + 2\pi, -v), v = 0, ..., \pi/2.$$

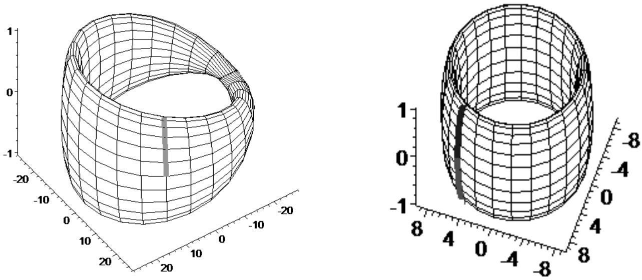

Рис. 3. Бутылка Клейна и тор

Список литературы

1. *Mashke H.* Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Amer. Math. Sos. 1900. № 1:1.

2. *Сабитов И.Х.* Изометрические погружения и вложения плоского листа Мёбиуса в евклидовы пространства // Известия РАН. 2007. Т. 71, №5. С. 197—224.

3. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М.* Аналитические поверхности. М., 2006.

4. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М., 1981.

5. *Чешкова М.А*. О бутылке Клейна // Известия Алтайского университета. 2012. №1/1. С. 130—135.

6. *Чешкова М.А*. Обмотка тора и лист Мёбиуса : сборник трудов XVII региональной конференции по математике. Барнаул, 2014. С. 37—40.

7. *Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н.* Введение в топологию. М., 1995.

8. *Постников М. М.* Дифференциальная геометрия. Семестр 4. М., 1983.

M. Cheshkova

To geometry of one-sided surface

Normal vector is defined along a closed curve on the surfaces. If you return to the starting point and the normal direction coincides with the original, regardless of the choice of the curve, then the surface is called bilateral. Otherwise, we have the one-sided surface. The Mebius band is one-sided surface. Cross-cap, Klein bottle are also one-sided surfaces. The examples of these surfaces are constructed using the mathematical paskage Maple.

УДК 514.76

Ю. И. Шевченко

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

eckrydlova@kantiana.ru

Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий

С помощью структурных уравнений Лаптева дана иерархия гладких многообразий, рассматриваемых локально с точностью до второго порядка. Определены неголономное, полуголономное, голономное и тривиальное гладкие многообразия. Доказано, что подмногообразие полуголономного гладкого многообразия является полуголономным гладким многообразием, а подмногообразие голономного гладкого многообразия голономно.

Ключевые слова: гладкое многообразие, полуголономное многообразие, голономное многообразие, подмногообразие.