



8. (Charles) Li Ya., Yurov A. V. Lax pairs and Darboux transformations for Euler equations // Studies in Applied Mathematics. 2003. Т. 111, №1. P. 101–113.

9. Yurov A. V., Yurova A. A. One method for constructing exact solutions of equations of two-dimensional hydrodynamics of an incompressible fluid // Theoretical and Mathematical Physics. 2006. Т. 147, №1. P. 501–508.

10. Bordag M., Yurov A. Spontaneous symmetry breaking and reflectionless scattering data // Physical Review D – Particles, Fields, Gravitation and Cosmology. 2003. Т. 67, №2.

### Об авторах

Алла Александровна Юрова – канд. физ.-мат. наук, доц., Калининградский государственный технический университет, e-mail: yurov@freemail.ru

17

### Author

Alla Yurova – PhD, associate professor, Kaliningrad State Technical University, e-mail: yurov@freemail.ru

УДК 530.145

*А. И. Иванов, А. А. Иванов*

### ОЦЕНКА ОШИБОК ДЕТЕКТИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЙ КУБИТА

*Исследуется оказываемое в процессе измерения обратное действие квантового точечного контакта на состояния двойной квантовой точки. Для описания этого действия вводится вспомогательная подсистема, которая находится в перепутанных состояниях с исследуемой системой. Такая модель позволила оценить время установления стационарного состояния объединенной системы «двойная квантовая точка – квантовый точечный контакт», отождествить его со временем измерения и оценить ошибки детектирования состояний кубита.*

*In this paper we study the back-action of the quantum point contact on the state of a double quantum dot during the measurement process. To describe this action we introduce an auxiliary subsystem, which is in the entangled states with the original system. This model allowed us to estimate establishment of the steady state of the combined system «double quantum dot – quantum point contact», and identify it as a measurement time and estimate the errors of the qubit states detection.*

**Ключевые слова:** двойная квантовая точка, квантовый точечный контакт, квантовые измерения.

**Key words:** double quantum dot, quantum point contact, quantum measurement.



Квантовые точки являются полупроводниковыми наноструктурами с размерами в диапазоне от единиц до нескольких сотен нанометров, в которых электроны, дырки или экситоны удерживаются во всех трех пространственных направлениях. Основной интерес к квантовым точкам возникает вследствие большой гибкости в изменении их энергетического спектра при изменении их геометрической структуры, например, с помощью внешних затворов. Двойная квантовая точка – подходящий кандидат на роль квантового кубита, основного логического элемента квантового компьютера. Для такого применения ключевым моментом является вопрос детектирования состояний квантового кубита. Это осуществимо, к примеру, с помощью квантового точечного контакта (quantum point contact – QPC), который можно использовать в качестве детектора зарядов для определения изменения числа электронов в квантовой точке.

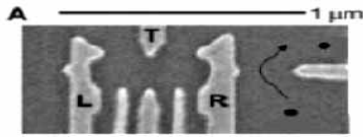


Рис. 1. Микрофотография образца двойной квантовой точки с квантовым точечным контактом вблизи правой точки [1]

Рассмотрим модель взаимодействия двойной квантовой точки и расположенного вблизи нее квантового точечного контакта. Данная модель основана на последних экспериментах по манипулированию и измерению двух состояний спина электрона в двойной квантовой точке [1]. Как показано на рисунке 1, двойная квантовая точка формируется в слое двумерного электронного газа, ограниченного несколькими электростатическими затворами, используемыми для контроля за потенциалами точек и межточечным туннелированием.

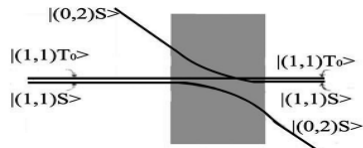


Рис. 2. Уровни энергии двойной квантовой точки

Энергетический спектр двойной квантовой точки представлен на рисунке 2. В процессе измерения система устанавливается в режиме со смещением (серая область на рисунке 2), который соответствует трем энергетическим уровням двойной квантовой точки с гамильтонианом вида

$$H_0 = E_T | (1,1)T_0 \rangle \langle (1,1)T_0 | + E_S | (1,1)S \rangle \langle (1,1)S | - \varepsilon | (0,2)S \rangle \langle (0,2)S | + T_C ( | (1,1)S \rangle \langle (0,2)S | + | (0,2)S \rangle \langle (1,1)S | ),$$

где  $(n_l, n_r)$  означает, что  $n_l$  электронов на «левой» точке и  $n_r$  электронов на «правой» точке;  $S$  и  $T$  – соответственно синглетное и триплетное состояние спинов;  $\varepsilon$  и  $T_c$  – внешнее напряжение смещения и амплитуда туннелирования между точками. Рассмотрим приближение  $E_T \approx E_S = 0$ , тогда гамильтониан сводится к следующему выражению:

$$H_{DD} = -\varepsilon | (0,2)S \rangle \langle (0,2)S | + T_C ( | (1,1)S \rangle \langle (0,2)S | + | (0,2)S \rangle \langle (1,1)S | )$$



Когда электрон туннелирует в правую точку или из нее, электростатический потенциал в непосредственной близости от точки изменяется, и ток через квантовый точечный контакт  $I_{QPC}$ , очень чувствительный к электростатическим изменениям, реагирует соответственно, таким образом, изменение  $I_{QPC}$  отражает изменение числа электронов в правой точке. Два электронных спиновых состояния  $|(1,1)S\rangle$  и  $|(0,2)S\rangle$  можно различить с помощью квантового точечного контакта, так как они имеют разные распределения зарядов [1]. Рассмотрим систему из двух квантовых точек и квантового точечного контакта возле правой точки, тогда гамильтониан полной системы можно записать в виде

$$H = H_{DD} + H_{QPC} + H_{int},$$

$$H_{QPC} = \sum_U E_U a_U^\dagger a_U + \sum_L E_L a_L^\dagger a_L,$$

$$H_{int} = \sum_{L,U} \{ \Omega_{UL} |(1,1)S\rangle \langle (1,1)S| (a_L^\dagger a_U + a_U^\dagger a_L) + \delta \Omega_{UL} |(0,2)S\rangle \langle (0,2)S| (a_L^\dagger a_U + a_U^\dagger a_L) \}.$$

Двойная квантовая точка в процессе измерения является двухуровневой системой, где состояния  $|(0,2)S\rangle$  и  $|(1,1)S\rangle$  соответствуют случаям, когда оба электрона находятся в правой точке или по одному электрону – на каждой точке. QPC описывается как стандартная одномерная система невзаимодействующих электронов, где  $a_U^\dagger (a_U)$  и  $a_L^\dagger (a_L)$  – операторы рождения (уничтожения) в верхней и нижней частях QPC. Поскольку наличие лишнего электрона в правой точке приводит к эффективному увеличению барьера в QPC, амплитуда туннелирования QPC может быть представлена как  $\Omega_{UL}$  и  $\delta \Omega_{UL}$  для состояний  $|(1,1)S\rangle \equiv |2\rangle$  и  $|(0,2)S\rangle \equiv |1\rangle$  соответственно. Уравнения для редуцированной матрицы плотности двойной квантовой точки можно получить из многочастичных уравнений Шредингера для полной системы, усредняя их по состояниям квантового точечного контакта [2]:

$$\frac{d\sigma_{11}}{dt} = \frac{i}{h} T_C (\sigma_{12} - \sigma_{21}), \quad \frac{d\sigma_{22}}{dt} = \frac{i}{h} T_C (\sigma_{21} - \sigma_{12}),$$

$$\frac{d\sigma_{12}}{dt} = \frac{i}{h} \varepsilon \sigma_{11} + \frac{i}{h} T_C (\sigma_{11} - \sigma_{22}) - \Gamma_d \sigma_{12}. \quad (1)$$

Последний член в уравнении для недиагональных элементов матрицы плотности  $\sigma_{12}$  приводит к их экспоненциальному затуханию (декогеренции) со скоростью  $\Gamma_d$ .

Применяя далее изложенный в работе [3] метод эффективного гамильтониана к системе уравнений (1), приведем ее к виду

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \hat{H}_{eff} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{H}_{eff}^\dagger \quad (2)$$



где

$$\hat{H}_{eff} = \begin{pmatrix} 0 & -T_C & T_C & 0 \\ -T_C & -\varepsilon - i\hbar\Gamma_d & 0 & T_C \\ T_C & 0 & \varepsilon - i\hbar\Gamma_d & -T_C \\ 0 & T_C & -T_C & 0 \end{pmatrix}$$

Отметим, что оператор  $\hat{H}_{eff}$  – неэрмитов. Матрицы  $\hat{\rho}$  и  $\hat{H}_{eff}$ , характеризующие объединенную систему «двойная квантовая точка – квантовый точечный контакт», записаны в базисе

20

$$\begin{aligned} |I\rangle &\equiv |1\rangle \otimes |1'\rangle \equiv |11'\rangle \\ |II\rangle &\equiv |1\rangle \otimes |2'\rangle \equiv |12'\rangle \\ |III\rangle &\equiv |2\rangle \otimes |1'\rangle \equiv |21'\rangle \\ |IV\rangle &\equiv |2\rangle \otimes |2'\rangle \equiv |22'\rangle \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь состояние  $|11'\rangle$  – состояние полной системы, в котором двойная квантовая точка находится в состоянии  $|1\rangle$ , а квантовый точечный контакт – в состоянии  $|1'\rangle$ , которому соответствует ток  $I_1$ . Аналогично  $|22'\rangle$  – состояние полной системы, в котором двойная квантовая точка находится в состоянии  $|2\rangle$ , а квантовый точечный контакт в состоянии  $|2'\rangle$ , которому соответствует ток  $I_2$ .

Находя правые собственные вектора оператора  $\hat{H}_{eff}$ , определяемые из уравнения

$$\hat{H}_{eff}|\varphi_k\rangle = E_k|\varphi_k\rangle,$$

интегрируя затем в базисе из них уравнение (2) и возвращаясь в измерительный базис (3), для диагональных матричных элементов матрицы плотности объединенной системы находим

$$\begin{aligned} \rho_{II} &= \frac{1}{2}C_1 + C_2 e^{\frac{-it}{\hbar}(E_2 - E_2^*)} + C_3 e^{\frac{-it}{\hbar}(E_3 - E_3^*)} + C_4 e^{\frac{-it}{\hbar}(E_4 - E_4^*)}, \\ \rho_{III} &= C_{II}^{(1)} e^{\frac{-it}{\hbar}(E_2 - E_2^*)} + C_{II}^{(2)} e^{\frac{-it}{\hbar}(E_3 - E_3^*)} + C_{II}^{(3)} e^{\frac{-it}{\hbar}(E_4 - E_4^*)}, \\ \rho_{III} &= C_{III}^{(1)} e^{\frac{-it}{\hbar}(E_2 - E_2^*)} + C_{III}^{(2)} e^{\frac{-it}{\hbar}(E_3 - E_3^*)} + C_{III}^{(3)} e^{\frac{-it}{\hbar}(E_4 - E_4^*)}, \\ \rho_{IV} &= \frac{1}{2}C_1 + C_{IV}^{(1)} e^{\frac{-it}{\hbar}(E_2 - E_2^*)} + C_{IV}^{(2)} e^{\frac{-it}{\hbar}(E_3 - E_3^*)} + C_{IV}^{(3)} e^{\frac{-it}{\hbar}(E_4 - E_4^*)}. \end{aligned}$$

Эти диагональные элементы позволяют вычислить вероятности нахождения объединенной системы в соответствующих состояниях и, следовательно, позволяют оценить ошибки детектирования состояний двойной квантовой точки с помощью квантового точечного контакта:

- Относительная частота  $p_1$  ошибок первого рода, или ложных срабатываний при детектировании состояния двойной квантовой точки посредством квантового точечного контакта (за ложное срабатывание



принимается изменение тока в квантовом точечном контакте в отсутствие туннелирования между квантовыми точками), определяется соотношением

$$p_1 = \frac{\rho_{II}}{\rho_{II} + \rho_{IV}} 100\%.$$

• Относительная частота  $p_2$  ошибок второго рода, или пропуска события при детектировании состояния двойной квантовой точки посредством квантового точечного контакта (за ложное срабатывание принимается отсутствие изменения тока в квантовом точечном контакте при переходе электрона из первой квантовой точки во вторую), определяется соотношением

$$p_2 = \frac{\rho_{III}}{\rho_{III} + \rho_{II}} 100\%.$$

Оценим относительные частоты ошибок первого и второго рода. Для этого используем значения параметров, приведенные в работе [2]: внешнее напряжение смещения  $\varepsilon = 30 \mu\text{eV}$ , амплитуда туннелирования  $T_c = 10 \mu\text{eV}$ , скорость декогеренции  $\Gamma_d \approx 1,139 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$ .

Для выбранных значений параметров собственные значения  $E_k$  эффективного гамильтониана равны:

$$\begin{aligned} E_1 &= 0, \\ E_2 &= 36,05551 - 0,00634i, \\ E_3 &= -36,05551 - 0,00634i, \\ E_4 &= -1 \cdot 10^{-8} - 0,00230i. \end{aligned}$$

Для момента времени  $t = 0$  относительные частоты ошибок равны соответственно  $p_1 \approx 22,5\%$ ,  $p_2 \approx 5,7\%$ .

Для момента времени  $t = T_2$  относительные частоты ошибок уменьшаются:  $p_1 \approx 16,2\%$ ,  $p_2 \approx 2,3\%$ .

Здесь время  $T_k$  определено соотношением

$$T_k = \frac{\hbar}{2 \text{Im}(E_k)}.$$

Нетрудно видеть, что эти времена определяют время распада состояний  $|II\rangle$ ,  $|III\rangle$ . Для указанных значений параметров  $\varepsilon$ ,  $T_c$ ,  $\Gamma_d$  они имеют следующие значения:  $T_2 \approx T_3 \approx 5,19 \cdot 10^{-8} \text{ c}$ ,  $T_4 \approx 1,43 \cdot 10^{-7} \text{ c}$ . Следовательно, на временах  $t \gg T_4$ , получим  $\rho_{II} = \rho_{III} = 0$ , объединенная система переходит в состояние вида

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11'\rangle + |22'\rangle).$$

Состояние  $|\varphi_1\rangle$  — стационарное перепутанное состояние объединенной системы, состоящей из двойной квантовой точки и квантового



точечного контакта. Это состояние обладает тем замечательным свойством, что если квантовый точечный контакт детектируется в состоянии  $|1'\rangle$  (со значением тока  $I_1$ ), то двойная квантовая точка будет находиться в состоянии  $|1\rangle$ , а если квантовый точечный контакт детектируется в состоянии  $|2'\rangle$  (со значением тока  $I_2$ ), то двойная квантовая точка будет находиться в состоянии  $|2\rangle$ . Другими словами, в стационарном состоянии  $|\varphi_1\rangle$  (на временах  $t \gg T_4$ ) детектирование состояния квантового точечного контакта переводит двойную квантовую точку в определенное квантовое состояние.

Таким образом, время  $T_4$  – это время установления стационарного перепутанного состояния  $|\varphi_1\rangle$ . Это время можно отождествить со временем измерения (measurement time)  $\tau_M$ . Согласно оценкам, приведенным в статье [5], оно лежит в интервале  $0,5 \cdot 10^{-5} - 0,2 \cdot 10^{-7}$  с. Полученное нами время  $T_4$  хорошо согласуется с такой оценкой. В работе [5] для детекторов со слабым откликом ("weakly responding" detectors) показано, что скорость декогеренции и время измерения связаны неравенством  $\Gamma_d \tau_M \geq 1/2$ . В этом соотношении равенство достигается для идеальных детекторов. Подставляя числовые значения  $\Gamma_d$  и  $\tau_M$  в это неравенство, можно видеть, что оно удовлетворяется. Предложенный здесь способ оценки ошибок детектирования состояний кубита и нахождения времени измерения  $\tau_M$  можно применить и к другим детекторам.

#### Список литературы

1. Petta J. R., Johnson A. C., Taylor J. M. et al. // Science. 2005. Vol. 309, 2180.
2. Zhu Fei-Yun, Zhu Zhi-Cheng et al. Effect of quantum point contact measurement in electron spin state in quantum dot. URL: <http://lanl.arxiv.org/abs/0808.0550v2> [quant-ph].
3. Иванов А.И., Иванов А.А. Применение метода эффективного гамильтониана в динамике открытых квантовых систем // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. Калининград, 2009. Вып. 4. С. 25.
4. Ruskov R., Dobrovitski V. V., Harmon B. N. Manipulation of double-dot spin qubit by continuous noisy measurement. URL: <http://lanl.arxiv.org/abs/0906.0425v1>. [quant-ph].
5. Devoret M. H., Schoelkopf R. J. // Nature. 2000. Vol. 406, 1039.

#### Об авторах

Алексей Иванович Иванов – д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта.

Александр Алексеевич Иванов – асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта.

#### Authors

Aleksej Ivanov – PhD, professor, I. Kant Baltic Federal University.

Alexander Ivanov – PhD student, I. Kant Baltic Federal University.