УДК 514.76

# СВЯЗНОСТЬ В СОСТАВНОМ МНОГООБРАЗИИ И ЕЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

Ю.И.Ш е в ч е н к о

(Калининградский государственный университет)

Доказано, что геометрическая связность в составном многообразии и линейные связности в расслоениях базисных и слоевых реперов определяют групповую связность в продолженном расслоении. Попутно показано, что объект кривизны геометрической связности является геометрическим объектом лишь в совокупности с объектом связности, причем в голономном случае образует тензор самостоятельно.

1. <u>Геометрическая связность.</u> Структурные уравнения $N$-мерного дифференцируемого многообразия $V_N$ имеют вид (см., например, [1]):

$$d\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K^J \quad (J, K = \overline{1,N}). \tag{1}$$

Зададим натуральное число $n < N$ и произведем разбиение значений индексов на две серии:

$$J = (i, \alpha); \quad i, j, k, \ell, p = \overline{1,n}; \quad \alpha, \beta, \gamma, \eta, \xi = \overline{n+1,N}.$$

Уравнения (1) запишутся подробнее:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^i, \tag{2}$$

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega^i \wedge \omega_i^\alpha \tag{3}$$

Условия полной интегрируемости системы уравнений $\omega^i = 0$ имеют вид $\omega_\alpha^i = K_{\alpha j}^i \omega^j + K_{\alpha\beta}^i \omega^\beta$, где функции $K_{\alpha\beta}^i$ симметричны по нижним индексам. Ограничимся достаточными условиями $\omega_\alpha^i = K_{\alpha\beta}^i \omega^\beta$ или, более того, $\omega_\alpha^i = 0$, тогда уравнения (2) упростятся:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i. \tag{4}$$

Это структурные уравнения $n$-мерного многообразия $V_n$. При $\omega^i = 0$ уравнения (3) принимают вид

$$d\bar\omega^\alpha = \bar\omega^\beta \wedge \bar\omega_\beta^\alpha, \tag{5}$$

где

$$\bar\omega^\alpha = \omega^\alpha \big|_{\omega^i = 0}, \qquad \bar\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha \big|_{\omega^i = 0}.$$

Уравнения (5) есть структурные уравнения $m$-многообразия $V_m \subset V_N$, причем $m = N - n$. Таким образом, многообразие $V_N$ в рассматриваемом случае является составным многообразием $V_N = V_m(V_n)$ в смысле Вагнера [2] со структурными уравнениями (3), (4). Составное



многообразие $V_m(V_n)$ можно называть расслоением с базой $V_n$ и типовым слоем $V_m$. Расслоение $V_m(V_n)$ есть $n$-мерное многообразие слоев $V_m$, а его база – фактормногообразие $V_n = V_N / V_m$.

В расслоении $V_m(V_n)$ зададим линейную дифференциально-геометрическую (короче – геометрическую) связность Вагнера [2] способом В.И. Близникаса [3]. Преобразуем слоевые формы $\omega^\alpha$ с помощью базисных форм $\omega^i$ : $\hat\omega^\alpha = \omega^\alpha - L_i^\alpha \omega^i$, где $L_i^\alpha$ – некоторые функции. Внешние дифференциалы форм $\hat\omega^\alpha$ имеют вид

$$d\hat\omega^\alpha = \hat\omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega^i \wedge (\nabla L_i^\alpha + \omega_i^\alpha), \tag{6}$$

где оператор $\nabla$ действует следующим образом:

$$\nabla L_i^\alpha = dL_i^\alpha - L_j^\alpha \omega_i^j + L_i^\beta \omega_\beta^\alpha. \tag{7}$$

Потребуем, чтобы функции $L_i^\alpha$ удовлетворяли уравнениям

$$\nabla L_i^\alpha + \omega_i^\alpha = L_{ij}^\alpha \omega^j + L_{i\beta}^\alpha \omega^\beta. \tag{8}$$

Тогда уравнения (6) преобразуются в структурные уравнения для форм геометрической связности

$$d\hat\omega^\alpha = \hat\omega^\beta \wedge (\omega_\beta^\alpha - L_{i\beta}^\alpha \omega^i) + R_{ij}^\alpha \omega^i \wedge \omega^j,$$

причем объект кривизны $R_{ij}^\alpha$ находится по формуле [3, с.197]:

$$R_{ij}^\alpha = L_{[ij]}^\alpha + L_{[i\beta}^\alpha L_{j]}^\beta, \tag{9}$$

где по крайним индексам, заключенным в квадратные скобки, производится альтернирование.

З а м е ч а н и я: 1) геометрическую связность называют также линейной связностью, что имеет неоднозначный смысл [4], и инфинитезимальной связностью [5], [6], [13], но последнее название используется и для главного расслоения; 2) М.О.Рахула [6] и другие авторы [7, с.81] предлагают иные методы исследования геометрической связности; 3) при изучении ассоциированного расслоения, являющегося частным случаем составного многообразия, Ю.Г.Лумисте говорит [14, с.429] о кручении вместо кривизны геометрической связности; 4) если поле объекта геометрической связности $L_i^\alpha$ задано не на расслоении $V_m(V_n)$, а на базе $V_n$, т.е. $L_{i\beta}^\alpha = 0$, то будем говорить о суженной геометрической связности; 5) иногда в том же смысле [5, с.8] В.И.Близникас употребляет термин "усеченная связность", но обычно в другом [3].

2. <u>Групповая связность.</u> Пусть формы $\omega_\beta^\alpha$ являются следующими линейными комбинациями слоевых форм $\omega^\gamma$ :

$$\omega_\beta^\alpha = \frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma, \tag{10}$$

где $C_{\beta\gamma}^\alpha$ – структурные константы $m$-членной группы Ли $G_m$, т.е. удовлетворяют условиям антисимметрии $C_{(\beta\gamma)}^\alpha = 0$ и тождествам

Якоби $C^{\alpha}_{\beta(\gamma}C^{\beta}_{\eta\xi\}}=0$, причем круглые скобки обозначают симметрирование, а фигурные – циклирование. Уравнения (3), (4) при условии (10) есть структурные уравнения Лаптева [8] главного расслоения $G_m(V_n)$.

В главном расслоении $G_m(V_n)$ зададим фундаментально-групповую (короче – групповую [6]) связность способом Лаптева [8] с помощью поля объекта $\Gamma^{\alpha}_{i}$ на базе $V_n$ [9]:

$$d\Gamma^{\alpha}_{i}-\Gamma^{\alpha}_{j}\omega^{j}_{i}+\Gamma^{\beta}_{i}C^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}+\omega^{\alpha}_{i}=\Gamma^{\alpha}_{ij}\omega^{j}. \tag{11}$$

Т е о р е м а 1. Геометрическая связность в главном расслоении $G_m(V_n)$ является групповой тогда и только тогда, когда слоевые пфаффовы производные $L^{\alpha}_{i\beta}$ объекта геометрической связности $L^{\alpha}_{i}$ есть линейные комбинации компонент этого объекта с коэффициентами, составленными из констант $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ группы Ли $G_m$:

$$L^{\alpha}_{i\beta}=\frac{1}{2}C^{\alpha}_{\beta\gamma}L^{\gamma}_{i}\,. \tag{12}$$

Действительно, требуя совпадения уравнений (8) с учетом соотношений (7), (10) и уравнений (11), получим формулу (12).

Т е о р е м а 2. Если поле объекта групповой связности $\Gamma^{\alpha}_{i}$ задать не на базе $V_n$ расслоения $G_m(V_n)$, а на всем расслоении, то расширенное поле объекта $\Gamma^{\alpha}_{i}$ определит геометрическую связность в главном расслоении $G_m(V_n)$.

В самом деле, дополним правые части уравнений (11) слагаемыми $\Gamma^{\alpha}_{i\beta}\omega^{\beta}$ и преобразуем расширенные уравнения к виду

$$d\Gamma^{\alpha}_{i}-\Gamma^{\alpha}_{j}\omega^{j}_{i}+\frac{1}{2}C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{i}\omega^{\gamma}+\omega^{\alpha}_{i}=\Gamma^{\alpha}_{ij}\omega^{j}+(\Gamma^{\alpha}_{i\beta}+\frac{1}{2}C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\gamma}_{i})\omega^{\beta}, \tag{13}$$

а это уравнения типа (8).

З а м е ч а н и е: 6) если в уравнениях (13) положить $\Gamma^{\alpha}_{i\beta}=0$, что соответствует исходному полю объекта $\Gamma^{\alpha}_{i}$, то с точностью до обозначений очевидна формула (12).

3. <u>Кривизна геометрической связности.</u> Продолжая структурные уравнения (4), получим

$$d\omega^{i}_{j}=\omega^{k}_{j}\wedge\omega^{i}_{k}+\omega^{k}\wedge\omega^{i}_{jk}, \tag{14}$$

причем

$$\omega^{i}_{jk}\wedge\omega^{j}\wedge\omega^{k}=0. \tag{15}$$

Для выполнения соотношений (15) достаточны [1] условия

$$\omega^{i}_{[jk]}=0. \tag{16}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (3), найдем

$$\omega^{\beta}\wedge(d\omega^{\alpha}_{\beta}-\omega^{\gamma}_{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\gamma})+\omega^{i}\wedge(d\omega^{\alpha}_{i}-\omega^{j}_{i}\wedge\omega^{\alpha}_{j}-\omega^{\beta}_{i}\wedge\omega^{\alpha}_{\beta})=0\,.$$

Откуда, в силу обобщенной леммы Картана [1], получим



$$d\omega^{\alpha}_{\beta}=\omega^{\gamma}_{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\gamma}+\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\alpha}_{\beta\gamma}+\omega^{i}\wedge\omega^{\alpha}_{\beta i}, \tag{17}$$

$$d\omega^{\alpha}_{i}=\omega^{j}_{i}\wedge\omega^{\alpha}_{j}+\omega^{\beta}_{i}\wedge\omega^{\alpha}_{\beta}+\omega^{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{i\beta}+\omega^{j}\wedge\omega^{\alpha}_{ij}, \tag{18}$$

причем

$$\omega^{\alpha}_{\beta\gamma}\wedge\omega^{\beta}\wedge\omega^{\gamma}+(\omega^{\alpha}_{i\beta}-\omega^{\alpha}_{\beta i})\wedge\omega^{i}\wedge\omega^{\beta}+\omega^{\alpha}_{ij}\wedge\omega^{i}\wedge\omega^{j}=0. \tag{19}$$

Соотношения (19) выполняются, если

$$\omega^{\alpha}_{\beta\gamma}\wedge\omega^{\beta}\wedge\omega^{\gamma}=0,\quad(\omega^{\alpha}_{i\beta}-\omega^{\alpha}_{\beta i})\wedge\omega^{i}\wedge\omega^{\beta}=0,\quad\omega^{\alpha}_{ij}\wedge\omega^{i}\wedge\omega^{j}=0,$$

или, более того, трехиндексные формы симметричны по нижним индексам:

$$\omega^{\alpha}_{[\beta\gamma]}=0\,,\quad\omega^{\alpha}_{[i\beta]}=0\,,\quad\omega^{\alpha}_{[ij]}=0\,. \tag{20}$$

Теперь продолжим дифференциальные уравнения (8):

$$\nabla L^{\alpha}_{ij}-L^{\alpha}_{i\beta}\omega^{\beta}_{j}-L^{\alpha}_{k}\omega^{k}_{ij}+L^{\beta}_{i}\omega^{\alpha}_{\beta j}+\omega^{\alpha}_{ij}\equiv0, \tag{21}$$

$$\nabla L^{\alpha}_{i\beta}+L^{\gamma}_{i}\omega^{\alpha}_{\gamma\beta}+\omega^{\alpha}_{i\beta}\equiv0, \tag{22}$$

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю форм $\omega^{i},\omega^{\alpha}$. Найдем сравнения на компоненты объекта кривизны (9) с помощью соотношений (8), (21), (22):

$$\nabla R^{\alpha}_{ij}-L^{\alpha}_{k}\omega^{k}_{[ij]}+L^{\beta}_{[i}(\omega^{\alpha}_{\beta j]}-\omega^{\alpha}_{j]\beta})-L^{\beta}_{[i}L^{\gamma}_{j]}\omega^{\alpha}_{\gamma\beta}+\omega^{\alpha}_{[ij]}\equiv0.$$

Т е о р е м а 3. В общем случае объект кривизны геометрической связности $R^{\alpha}_{ij}$ образует геометрический объект лишь в совокупности с объектом геометрической связности $L^{\alpha}_{i}$. В голономном случае (16), (20) объект кривизны $R^{\alpha}_{ij}$ является тензором на расслоении $(V_m(V_n)$.

З а м е ч а н и я: 7) ранее рассматривался голономный случай, т.к. В.И.Близникас говорит о тензоре кривизны [3, с.197] [5, с.9], а М.О.Рахула – об объекте кривизны, который представляет собой тензор [6, с.168–169]; 8) в одном случае нетензорность кривизны отмечена В.И.Близникасом [5, с.10]; 9) из сравнений (22) видно, что величины $L^{\alpha}_{i\beta}$ не образуют псевдотензор [9], значит равенства $L^{\alpha}_{i\beta}=0$ не имеют инвариантного смысла, т.е. суженная геометрическая связность, вообще говоря, не существует.

4. <u>Продолжение составного многообразия.</u> При фиксации точки базы $V_n$ продолженные уравнения (14), (17), (18) упростятся:

$$\begin{cases} d\bar{\omega}^{i}_{j}=\bar{\omega}^{k}_{j}\wedge\bar{\omega}^{i}_{k}, \quad d\bar{\omega}^{\alpha}_{\beta}=\bar{\omega}^{\gamma}_{\beta}\wedge\bar{\omega}^{\alpha}_{\gamma}+\bar{\omega}^{\gamma}\wedge\bar{\omega}^{\alpha}_{\beta\gamma}, \\ d\bar{\omega}^{\alpha}_{i}=\bar{\omega}^{j}_{i}\wedge\bar{\omega}^{\alpha}_{j}+\bar{\omega}^{\beta}_{i}\wedge\bar{\omega}^{\alpha}_{\beta}+\bar{\omega}^{\beta}\wedge\bar{\omega}^{\alpha}_{i\beta}, \end{cases} \tag{23}$$

где черта означает выполнение уравнений $\omega^{i}=0$. Из уравнений (5), (23) следует, что формы $\bar{\omega}^{\alpha},\bar{\omega}^{i}_{j},\bar{\omega}^{\alpha}_{\beta},\bar{\omega}^{\alpha}_{i}$ образуют полную сис-

15 Зак. 1399

тему и определяют некоторое дифференцируемое многообразие $M$, причем $\dim M = m+n^2+m^2+mn$. Отметим, что формы $\overline{\omega}^\alpha$ составляют полную подсистему и являются структурными формами типового слоя $V_m$ расслоения $V_m(V_n)$.

Если зафиксировать точку расслоения $V_m(V_n)$, то уравнения (23) примут вид

$$d\overline{\overline{\omega}}_j^i = \overline{\overline{\omega}}_j^k \wedge \overline{\overline{\omega}}_k^i, \qquad (24)$$

$$d\overline{\overline{\omega}}_\beta^\alpha = \overline{\overline{\omega}}_\beta^\gamma \wedge \overline{\overline{\omega}}_\gamma^\alpha, \qquad (25)$$

$$d\overline{\overline{\omega}}_i^\alpha = \overline{\overline{\omega}}_i^j \wedge \overline{\overline{\omega}}_j^\alpha + \overline{\overline{\omega}}_i^\beta \wedge \overline{\overline{\omega}}_\beta^\alpha, \qquad (26)$$

где две черты предполагают выполнение уравнений $\omega^i = 0$, $\omega^\alpha = 0$. Уравнения (24), (25) есть структурные уравнения линейных групп $L_{n^2} = GL(n)$, $L_{m^2} = GL(m)$, а все уравнения (24)-(26) являются структурными уравнениями рассмотренной В.И.Близникасом [3, с.178] группы Ли $G \subset GL(n+m)$, причем $\dim G = n^2+m^2+mn$.

Таким образом, многообразие $M$ со структурными уравнениями (5), (23) есть главное расслоение $M = G(V_m)$, базой которого служит типовой слой $V_m$ расслоения $V_m(V_n)$, а типовым слоем – группа $G$. Если не фиксировать слой расслоения $V_m(V_n)$, то уравнения (3), (4), (14), (17), (18) представляют собой структурные уравнения расслоения $M(V_n) = G(V_m(V_n))$ – продолжения расслоения $V_m(V_n)$.

Т е о р е м а 4. Продолжение составного многообразия $V_m(V_n)$ можно рассматривать с двух точек зрения: 1) как главное расслоение $G(V_m(V_n))$, базой которого является исходное расслоение $V_m(V_n)$, а типовым слоем – группа Ли $G$; 2) как расслоение $M(V_n)$ над базой $V_n$ с типовым слоем $M = G(V_m)$.

В дальнейшем ограничимся первой точкой зрения на продолжение расслоения $V_m(V_n)$, т.к. вторая уже использовалась [3]. Продолженное расслоение $G(V_m(V_n))$ содержит два главных расслоения: базисных и слоевых линейных реперов $L_{n^2}(V_n)$ и $L_{m^2}(V_m(V_n))$ со структурными уравнениями (4), (14) и (3), (4), (17).

З а м е ч а н и я: 10) расслоения $L_{n^2}(V_n)$ и $L_{m^2}(V_m(V_n))$ названы В.И.Близникасом [3, с.177] горизонтальной и вертикальной расслоенными дифференциальными структурами, однако все продолженное расслоение не исследовалось; 11) расслоения $L_{m^2}(V_m(V_n))$ и $G(V_m(V_n))$ являются двухъярусными расслоениями [10].

5. Действия групп. Зафиксируем точку $A \in V_m(V_n)$ и рассмотрим соответствующее $(n+m)$-мерное касательное пространство $T_{n+m}$ к составному многообразию $V_m(V_n)$. Отнесем фиксированное векторное пространство $T_{n+m}$ к подвижному реперу $\{e_i, e_\alpha\}$, векторы $e_\alpha$ которого принадлежат подпространству $T_m$, касательному к проходящему через точку $A$ слою $V_m$. Тогда $dA = \omega^i e_i + \omega^\alpha e_\alpha$, откуда $\overline{d}A = \overline{\omega}^\alpha e_\alpha$, что соответствует смещению точки $A$ в слое $V_m$, а $\overline{\overline{d}}A = 0$, т.е. $A = \mathrm{const}$. Деривационные формулы репера $\{e_i, e_\alpha\}$ имеют вид [3, с.178]:

$$\overline{\overline{d}}e_i = \overline{\overline{\omega}}_i^j e_j + \overline{\overline{\omega}}_i^\alpha e_\alpha, \quad \overline{\overline{d}}e_\alpha = \overline{\overline{\omega}}_\alpha^\beta e_\beta. \qquad (27)$$

Из уравнений (27) следует

Т е о р е м а 5. Группа Ли $G$ действует в касательном пространстве $T_{n+m}$, содержащем подпространство $T_m$, в котором действует слоевая линейная группа $L_{m^2}$ (подгруппа группы $G$). Базисная линейная группа $L_{n^2}$ (факторгруппа группы $G$) действует в касательном пространстве $T_n$ к базе $V_n$, которое является факторпространством $T_n = T_{n+m}/T_m$.

6. Оснащение. Оснащением расслоения $V_m(V_n)$, или горизонтальным распределением на нем, называется (см., например, [4]) присоединение дифференцируемым образом к каждой его точке $n$-мерного подпространства $N_n \subset T_{n+m}$, трансверсального к вертикальному подпространству $T_m$: $N_n \cap T_m = 0$. Подпространство $N_n$ в фиксированной точке $A \in V_m(V_n)$ зададим векторами $E_i = e_i + \lambda_i^\alpha e_\alpha$. Дифференцируя их с использованием уравнений (27), найдем

$$\overline{\overline{d}}E_i = \overline{\overline{\omega}}_i^j E_j + (\overline{\overline{\nabla}}\lambda_i^\alpha + \overline{\overline{\omega}}_i^\alpha) e_\alpha.$$

Требуя, чтобы совокупность векторов $E_i$ была инвариантна в каждой точке расслоения $V_m(V_n)$, получим

$$\nabla\lambda_i^\alpha + \omega_i^\alpha = \lambda_{ij}^\alpha \omega^j + \lambda_{i\beta}^\alpha \omega^\beta. \qquad (28)$$

Уравнения (8) и (28) совпадают, поэтому объект геометрической связности $L_i^\alpha$ и оснащающий квазитензор $\lambda_i^\alpha$ можно отождествить: $L_i^\alpha = \lambda_i^\alpha$, т.е. справедлива

Т е о р е м а 6. Оснащение составного многообразия $V_m(V_n)$ эквивалентно заданию геометрической связности в нем.

З а м е ч а н и я: 12) теорема 6 оправдывает название геометрической связности и отождествляет подходы Эресмана [13] и Вагнера [2] в изложении В.И.Близникаса [3]; 13) оснащение расслоения $V_m(V_n)$ позволяет оснастить каждое подмногообразие $V_m \subset V_m(V_n)$, т.е. обобщает понятие оснащения $m$-поверхности в $(n+m)$-мерном аффинном пространстве.

7. Связность в продолженном расслоении. Зададим групповую связность в главном расслоении $G(V_m(V_n))$ способом Лаптева с по-

мощью форм
$$\begin{cases} \tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k - \Gamma^i_{j\alpha}\omega^\alpha, \quad \tilde{\omega}^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta - \Gamma^\alpha_{\beta i}\omega^i - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma, \\ \tilde{\omega}^\alpha_i = \omega^\alpha_i - \Gamma^\alpha_{ij}\omega^j - \Gamma^\alpha_{i\beta}\omega^\beta. \end{cases} \qquad (29)$$

Учитывая, что базой факторрасслоения $L_{n^2}(V_n)$ является не расслоение $V_m(V_n)$, а лишь его база $V_n$, положим $\Gamma^i_{j\alpha}=0$. Дифференцируя формы (29) внешним образом и пользуясь теоремой Картана-Лаптева [11], найдем сравнения на компоненты объекта
$$\Gamma = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}, \Gamma^\alpha_{ij}, \Gamma^\alpha_{i\beta}\},$$
задающего групповую связность:
$$\begin{cases} \nabla\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} \equiv 0 \pmod{\omega^i}, \quad \nabla\Gamma^\alpha_{\beta i} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma_i + \omega^\alpha_{\beta i} \equiv 0, \\ \nabla\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \omega^\alpha_{\beta\gamma} \equiv 0, \quad \nabla\Gamma^\alpha_{i\beta} - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}\omega^\gamma_i + \omega^\alpha_{i\beta} \equiv 0, \\ \nabla\Gamma^\alpha_{ij} - \Gamma^\alpha_{i\beta}\omega^\beta_j - \Gamma^\alpha_{\beta j}\omega^\beta_i + \Gamma^k_{ij}\omega^\alpha_k + \omega^\alpha_{ij} \equiv 0. \end{cases} \qquad (30)$$

Т е о р е м а 7. Геометрическая связность в составном многообразии $V_m(V_n)$ и линейные связности в расслоениях базисных реперов $L_{n^2}(V_n)$ и слоевых реперов $L_{m^2}(V_m(V_n))$ определяют групповую связность в продолженном расслоении $G(V_m(V_n))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подобъект $\Gamma^i_{jk}$ объекта групповой связности $\Gamma$ задает базисную линейную связность в факторрасслоении $L_{n^2}(V_n)$, а подобъект $\{\Gamma^\alpha_{\beta i}, \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\}$ – слоевую линейную связность в подрасслоении $L_{m^2}(V_m(V_n))$. Остальные компоненты $\Gamma^\alpha_{ij}$, $\Gamma^\alpha_{i\beta}$ объекта $\Gamma$ охватываются с помощью компонент $\Gamma^i_{jk}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, объекта геометрической связности $L^\alpha_i$ и его пфаффовых производных $L^\alpha_{ij}, L^\alpha_{i\beta}$ по формулам:
$$\Gamma^\alpha_{i\beta} = L^\alpha_{i\beta} - L^\gamma_i\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}, \quad \Gamma^\alpha_{ij} = L^\alpha_{ij} + L^\alpha_k\Gamma^k_{ij} - L^\beta_i\Gamma^\alpha_{\beta j},$$
проверяемым с помощью соотношений (8), (21), (22), (30).

З а м е ч а н и е: 14) геометрическая связность в расслоении базисных реперов $L_{n^2}(V_n)$ задается полем объекта $L^i_{jk}$:
$$dL^i_{jk} - L^i_{je}\omega^e_k + L^e_{jk}\omega^i_e + \omega^i_{jk} = L^i_{jke}\omega^e + L^{ip}_{jke}\omega^e_p,$$
причем линейная связность выделяется равенствами $L^{ip}_{jke} = \delta^p_j L^i_{ek}$, являющимися частным случаем формулы (12).

8. <u>С е ч е н и е.</u> Сечение расслоения $V_m(V_n)$ есть дифференцируемое отображение $s: V_n \to V_m(V_n)$, которое каждой точке базы $V_n$, т.е. каждому слою $V_m$, ставит в соответствие точку этого слоя. Сечение $s$ задается уравнениями $\omega^\alpha = \Lambda^\alpha_i\omega^i$, продолжая которые получим
$$\nabla\Lambda^\alpha_i + \omega^\alpha_i = \Lambda^\alpha_{ij}\omega^j. \qquad (31)$$

Т е о р е м а 8. Сечение составного многообразия $V_m(V_n)$ порождает в нем суженную геометрическую связность.



Т е о р е м а 9. В голономном случае сечение расслоения $V_m(V_n)$ и линейные связности в расслоениях реперов $L_{n^2}(V_n)$ и $L_{m^2}(V_m(V_n))$ задают групповую связность в продолженном расслоении $G(V_m(V_n))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продолжая уравнения (31), найдем
$$\nabla\Lambda^\alpha_{ij} - \Lambda^\alpha_k\omega^k_{ij} + \Lambda^\beta_j\omega^\alpha_{i\beta} + \Lambda^\beta_i(\Lambda^\gamma_j\omega^\alpha_{\beta\gamma} + \omega^\alpha_{\beta j}) + \omega^\alpha_{ij} = \Lambda^\alpha_{ijk}\omega^k.$$
Сечение $s$ дает возможность охватить компоненты $\Gamma^\alpha_{ij}$ объекта групповой связности $\Gamma$ с помощью его остальных компонент:
$$\Gamma^\alpha_{ij} = \Lambda^\alpha_{ij} + \Lambda^\alpha_k\Gamma^k_{ij} - \Lambda^\beta_i\Gamma^\alpha_{\beta j} - \Lambda^\beta_j(\Gamma^\alpha_{i\beta} + \Lambda^\gamma_i\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}).$$
В голономном случае $\Gamma^\alpha_{i\beta} = \Gamma^\alpha_{\beta i}$, что завершает доказательство.

З а м е ч а н и я: 15) на образ сечения $s(V_n)$ поле объекта геометрической связности $L^\alpha_i$ сужается другим способом:
$$\nabla L^\alpha_i + \omega^\alpha_i = (L^\alpha_{ij} + L^\alpha_{i\beta}\Lambda^\beta_j)\omega^j;$$
16) суженные геометрические связности, порожденные сечениями, встречались в конкретных исследованиях (см., например, [12]); 17) если $A \in s(V_n)$, то $dA = \omega^i(e_i + \Lambda^\alpha_i e_\alpha)$, т.е. квазитензор $\Lambda^\alpha_i$ определяет касательное $n$-пространство к многообразию $s(V_n)$, а значит лишь часть $s(V_n)$ составного многообразия $V_m(V_n)$ оснащена, поэтому возникает суженная связность.

## Библиографический список


1. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т.1. С.139-189.

2. В а г н е р В.В. Теория составного многообразия // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. М.; Л., 1950. Вып.8. С.11-72.

3. Б л и з н и к а с В.И. Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов // Лит. мат. сб. 1966. Т.6. № 2. С.141-209.

4. Л у м и с т е Ю.Г. Линейная связность // Мат. энцикл. М., 1982. Т.3. С.309-311.

5. Б л и з н и к а с В.И. О некоторых связностях расслоенных пространств // Лит. мат. сб. 1967. Т.7. № 1. С.5-16.

6. Р а х у л а М.О. Инфинитезимальная связность в расслоении // Проблемы геометрии. М., 1977. Т.8. С.163-182.

7. К о л а р ж И. Естественные расслоения и операторы // Проблемы геометрии. М., 1991. Т.23. С.67-98.

8. Л а п т е в  Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Тр. IУ Всесоюз. мат. съезда, 1961. Л.: Наука, 1964. Т.2. С.226-233.

9. Ш е в ч е н к о  Ю.И. Связность в продолжении главного расслоения // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1991. Вып.22. С.117-127.

10. О с т и а н у  Н.М. Ступенчато-расслоенные пространства // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.5. С.259-309.

11. О с т и а н у  Н.М., Р ы ж к о в  В.В., Ш в е й к и н  П.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.7-70.

12. Ш е в ч е н к о  Ю.И. Связности в расслоениях, ассоциированных с пространством квадрик // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1986. Вып.17. С.97-102.

13. Ehresmann C. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable // Colloque de Topologie. Bruxelles, 1950. P. 29-55.

14. Lumiste Ü. Connections in associated fibre bundles // Czech. Mat. J. 1981. V.31. №3. P. 421-432.

УДК 514.75

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК С ТРЕХКРАТНОЙ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

С.В.Ш м е л е в а

(КВИМУ)

В трехмерном проективном пространстве $P_3$ исследуются конгруэнции $\mathcal{K}_3^0$ невырожденных линейчатых квадрик с трехкратной невырождающейся в плоскость фокальной поверхностью $(A_0)$ и другой неплоской фокальной поверхностью $(A_3)$ ,асимптотические линии на которых соответствуют и огибаются прямолинейными образующими квадрики $Q \in \mathcal{K}_3^0$ , причем точки $A_1, A_2$ пересечения прямолинейных образующих, проходящих через $A_0$ и $A_3$ , полярно сопряжены относительно обеих ассоциированных квадрик $Q_1, Q_2$ [1, с.34]. Конгруэнции $\mathcal{K}_3^0$ разбиваются на три класса. Для каждого класса доказана теорема существования, исследованы фокальные многообразия и получены геометрические свойства ассоциированных прямолинейных конгруэнций.

1. Отнесем конгруэнцию $\mathcal{K}_3^0$ к реперу $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ . Тогда она удовлетворяет [2, с.106] системе уравнений Пфаффа конгруэнции невырожденных линейчатых квадрик с фокальными поверхностями $(A_0)$ и $(A_3)$:

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k, \quad \omega_i^3 - \omega^j = c_{ik}\omega^k, \\ \omega_i^0 - \omega_3^j = \lambda_{ik}\omega^k, \quad \omega_3^i = b_k^i \omega^k, \quad \Omega = h_k \omega^k, \end{cases} \qquad (1.1)$$

в которой надо учесть свойства, характеризующие конгруэнции $\mathcal{K}_3^0$ , и конечные соотношения:

$$c_{12} = c_{21}, \quad b_1^1 \lambda_{12} - b_2^2 \lambda_{21} + b_1^2 \lambda_{22} - b_2^1 \lambda_{11} = 0. \qquad (1.2)$$

Здесь и в дальнейшем $i,j,k = 1,2;\ i \neq j$ и по индексам $i$ и $j$ суммирование не производится;

$$\omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i, \quad \Omega \overset{def}{=} \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3. \qquad (1.3)$$

В силу того, что поверхности $(A_0)$ и $(A_3)$ не вырождаются в плоскости, имеем:

$$1 + c_{12} \neq 0, \quad b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1 \neq 0. \qquad (1.4)$$

Так как точки $A_1$ и $A_2$ полярно сопряжены относительно квадрики $Q_i$ :

$$h_i x^1 x^2 - a_{ii}^j (x^i)^2 - a_{ji}^i (x^j)^2 + \lambda_{ki} x^k x^3 + c_{ki} x^k x^0 = 0, \qquad (1.5)$$

то

$$h_1 = 0, \quad h_2 = 0. \qquad (1.6)$$

Учитывая, что прямолинейные образующие $A_0A_i$ и $A_3A_i$ квадрики $Q \in \mathcal{K}_3^0$ являются асимптотическими касательными поверхностей $(A_0)$ и $(A_3)$, получаем:

$$c_{11} = 0, \quad c_{22} = 0, \quad \lambda_{11} = 0, \quad \lambda_{22} = 0. \qquad (1.7)$$

Соответствие асимптотических линий на поверхностях $(A_0)$ и $(A_3)$ разбивает конгруэнции $\mathcal{K}_3^0$ на два класса: конгруэнции ${}^{(1)}\mathcal{K}_3^0$ с непересекающимися соответственными асимптотическими касательными, характеризуемые соотношениями

$$b_1^1 = 0, \quad b_2^2 = 0, \qquad (1.8)$$

и конгруэнции ${}^{(2)}\mathcal{K}_3^0$ с пересекающимися соответствующими касательными, для которых

$$b_1^2 = 0, \quad b_2^1 = 0. \qquad (1.9)$$

Замыкая уравнение $\Omega = 0$ , находим

$$\lambda_{12} - \lambda_{21} + (1 + c_{12})(b_1^1 - b_2^2) = 0. \qquad (1.10)$$

Условия трехкратности фокальной поверхности $(A_0)$ (см. (2) в работе [2]) запишутся в виде: