8. *Столяров А. В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии. М., 1975. Т. 7. С. 117—151.

9. *Столяров А. В.* Дифференциальная геометрия полос // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т. 10. С. 25—54.

10. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. М. ; Л., 1948.

A. Budylkin

Invariant normalization of composited hyperplane distribution in projective space

The article gives the task of SH-distribution, the proof of the existence in the frame of order zero. The invariant normalization and matching Bompiani — Pantazi major structural subbundles. The study of SH-distributions is relevant because these images are generalizations of special classes hyperbands and hypersurfaces, and hyperband distribution,which has application in the analysis of variance, physics, mechanics. Work performed by Laptev method.

УДК 514.76

А. В. Букушева
Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
bukusheva@list.ru

Изометрические преобразования продолженных почти контактных метрических структур с метрикой полного лифта

Рассматривается почти контактное метрическое пространство с внутренней метрической связностью. На распределении почти контактной метрической структуры естественным образом определяется продолженная риманова структура с метрикой полного лифта. Изучается строение инфинитезимальной изометрии продолженной структуры. Показывается, что полный лифт допустимой инфинитезимальной изометрии базы является изометрией метрики полного лифта.

Ключевые слова: внутренняя связность почти контактной метрической структуры, инфинитезимальные изометрии метрики полного лифта.

1. Введение. Пусть $\left(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D\right)$ — почти контактная метрическая структура, заданная на гладком многообразии M. В работе [1] было введено понятие внутренней метрической связности, ассоциированной с данной структурой. Внутренняя связность аналогична связности Леви-Чивита риманова многообразия. Задание внутренней связности позволяет естественным образом определить на распределении D почти контактного метрического многообразия риманову структуру. Получающееся при этом многообразие является нечетномерным аналогом касательного расслоения с метрикой полного лифта. В работе [2] исследовано строение инфинитезимальной изометрии пространства касательного расслоения риманова многообразия с метрикой полного лифта. В настоящей работе изучается строение инфинитезимальной изометрии метрики полного лифта, определяемой на распределении почти контактной метрической структуры. Основы геометрии распределения почти контактной метрической структуры заложены в работах [3—6].

2. Продолженные почти контактные метрические структуры. Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1,\ m \ge 1$, с заданной на нем почти контактной метрической структурой $\left(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D\right)$, где φ — тензор типа (1,1), называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η —

вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой. При этом выполняются равенства

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}, \;\; \eta\left(\vec{\xi}\right) = 1,$$

$$g\left(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}\right) = -g\left(\vec{x}, \vec{y}\right) + \eta\left(\vec{x}\right)\eta\left(\vec{y}\right), \tag{1}$$

где $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma\left(TM\right)$, $\Gamma\left(TM\right)$ — модуль векторных полей на многообразии *M*. Дополнительно потребуем, чтобы $\vec{\xi} \in \ker \omega$, где $\omega = d\eta$. Почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой, если $rk\, \omega = 2m$. Многообразие, наделенное (почти) контактной метрической структурой, называется (почти) контактным метрическим многообразием. Гладкое распределение $D = \ker \eta$ называется распределением почти контактной метрической структуры. Из (1) следует, что

$$\varphi\vec{\xi} = \vec{0}, \;\; \eta \circ \varphi = 0, \;\; \eta\left(\vec{x}\right) = g\left(\vec{x}, \vec{\xi}\right), \;\; g\left(\varphi\vec{x}, \vec{y}\right) = g\left(\vec{x}, \varphi\vec{y}\right).$$

Внутренней линейной связностью ∇ [1] на многообразии с почти контактной структурой называется отображение

$$\nabla : \Gamma\left(D\right) \times \Gamma\left(D\right) \to \Gamma\left(D\right),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1\vec{x} + f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}}$;

2) $\nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = \left(\vec{x}f\right)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$;

3) $\nabla_{\vec{x}}\left(\vec{y} + \vec{z}\right) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z}$,

где $\Gamma\left(D\right)$ — модуль допустимых векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению *D*.

Тензорное поле *t* типа *(p,q)*, заданное на почти контактном многообразии, назовем допустимым (к распределению *D*), если *t* обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η.

Необходимые для работы вычисления удобно проводить в адаптированных координатах. Карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1,\ldots, n$; $a, b, c = 1,\ldots, n-1$) многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [1]. Пусть P: $TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, $D^\perp = Span\left(\vec{\xi}\right)$. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$, линейно независимые в каждой точке своей области определения, порождают распределение D: $D = Span\left(\vec{e}_a\right)$. Неголономному полю базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ соответствует поле кобазисов

$$(dx^a, \eta = dx^n + \Gamma^n_a dx^a).$$

Непосредственно проверяется, что $\left[\vec{e}_a, \vec{e}_b\right] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Условие $\vec{\xi} \in \ker \omega$ влечет справедливость равенства $\partial_n \Gamma^n_a = 0$. Пусть $K(x^\alpha)$ и $K'(x^{\alpha'})$ — адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a\left(x^{a'}\right)$, $x^n = x^{n'} + x^n\left(x^{a'}\right)$. Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид

$$t = t^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q} \vec{e}_{a_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \ldots \otimes dx^{b_q}.$$

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону: $t^a_b = A^a_{a'} A^{b'}_b t^{a'}_{b'}$, где $A^a_{a'} = \dfrac{\partial x^a}{\partial x^{a'}}$. В адаптированных координатах коэффициенты Γ^a_{bc} внутренней связности ∇ определяются равенством $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma^c_{ab} \vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A^{a'}_a \vec{e}_{a'}$ обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов связности

$$\Gamma^c_{ab} = A^{a'}_a A^{b'}_b A^c_{c'} \Gamma^{c'}_{a'b'} + A^c_{c'} \vec{e}_a A^{c'}_b.$$

Кручением внутренней связности назовем допустимое тензорное поле $S(\vec{x},\vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x},\vec{y}]$, $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(D)$. На почти контактном метрическом многообразии M обычным образом определяется внутренняя симметричная метрическая связность [1].

Допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x},\vec{y}]}\vec{z} - P\left[Q[\vec{x},\vec{y}],\vec{z}\right],$$

где $Q = I - P$, названо Вагнером [7] тензором кривизны Схоутена. Тензор Схоутена будем называть тензором кривизны внутренней связности. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид:

$$R^{d}_{abc} = 2\vec{e}_{[\vec{a}}\Gamma^{d}_{b]c} + 2\Gamma^{d}_{[a|e|}\Gamma^{e}_{b]c}.$$

Тензор кривизны внутренней связности возникает в результате альтернирования вторых ковариантных производных:

$$2\nabla_{[a}\nabla_{b]}v^{c} = R^{c}_{abe}v^{e} + 4\omega_{ba}\partial_{n}v^{c}.$$

Назовем тензор кривизны внутренней связности тензором кривизны распределения D, а распределение D, в случае обращения в нуль тензора Схоутена, — распределением нулевой кривизны. Введем на распределении D почти контактного метрического многообразия M структуру гладкого многообразия следующим образом. Поставим в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^{\alpha})$ многообразия M сверхкарту $\tilde{K}\left(x^{\alpha}, x^{n+a}\right)$ на распределении D, полагая, что

$$\tilde{K}(\vec{x}) = \tilde{K}\left(x^{\alpha}, x^{n+a}\right),$$

где x^{n+a} — координаты допустимого вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_{a} = \partial_{a} - \Gamma^{n}_{a}\partial_{n}$: $\vec{x} = x^{n+a}\vec{e}_{a}$. Задание внутренней метрической связности ∇ влечет разложение распределения $\tilde{D} = \pi_{*}^{-1}(D)$, где $\pi : D \to M$ — естественная проекция, в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D, HD — горизонтальное распределение, порождаемое векторными полями

$$\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - G^b_a \partial_{n+b},$$

где $G^a_b\left(x^\alpha, x^{n+a}\right) = \Gamma^a_{bc}\left(x^\alpha\right) x^{n+c}$, Γ^a_{bc} — коэффициенты внутренней связности.

Формы

$$(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc} x^{n+c} dx^b)$$

определяют поле кобазисов, сопряженное к полю базисов

$$(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - \Gamma^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n, \partial_{n+a}).$$

На распределении D естественным образом возникает разложение $TD = \tilde{H}\tilde{D} \oplus VD$, где $\tilde{H}\tilde{D} = HD \oplus Span(\vec{u})$. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b\right] = 2\omega_{ba} \partial_n + x^{n+d} R^c_{bad} \partial_{n+c}, \left[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n\right] = x^{n+d} \partial_n \Gamma^c_{ad} \partial_{n+c},$$

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}\right] = \Gamma^c_{ab} \partial_{n+c}.$$

Всякому векторному полю $\vec{x} \in \Gamma(TM)$, заданному на многообразии M, обычным образом соответствует его горизонтальный лифт $\vec{x}^h$, при этом $\vec{x}^h \in \Gamma(HD)$ тогда и только тогда, когда $\vec{x}$ — допустимое векторное поле: $\vec{x} \in \Gamma(D)$. Справедливость теоремы 1 следует из полученных выше структурных уравнений.

Теорема 1. *Пусть* ∇ *— внутренняя симметричная связность с тензором кривизны Схоутена* $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$. *Тогда для всех* $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$ *и* $\vec{p} \in D$ *имеют место следующие равенства:*

$$\left[\vec{x}^h, \vec{y}^h\right] = [\vec{x}, \vec{y}]^h - \left\{R\left(\vec{x}, \vec{y}\right)\vec{p}\right\}^v, \tag{2}$$

$$\left[\vec{x}^h, \vec{\xi}^h\right] = \left\{P\left(\vec{x}, \vec{p}\right)\right\}^v, \tag{3}$$

$$\left[\vec{x}^h, \vec{y}^v\right] = \left(\nabla_{\vec{x}}\vec{y}\right)^v. \tag{4}$$

Продолженная почти контактная метрическая структура [3] представляет собой систему $(\tilde{D}, J, \vec{u} = \partial_n, \lambda = \eta \circ \pi_*, G, D)$. Метрику, определяемую следующими равенствами:

$$G(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = G(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = G(\vec{x}^h, \vec{u}) = G(\vec{x}^v, \vec{u}) = 0,$$

$$G(\vec{x}^h, \vec{y}^v) = G(\vec{x}^v, \vec{y}^h) = g(\vec{x}, \vec{y}),\ G(\vec{u}, \vec{u}) = 1, \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D), \tag{5}$$

будем называть метрикой полного лифта.

3. Инфинитезимальные изометрии метрики полного лифта. Пусть $\vec{v} \in \Gamma(D)$ — произвольное допустимое векторное поле. Поставим ему в соответствие векторное поле $\vec{v}^c \in \Gamma(\tilde{D})$, определяемое в допустимых координатах следующим образом:

$$\vec{v}^c = v^a \vec{\varepsilon}_a + x^{n+b}(\vec{e}_b v^a)\partial_{n+a}.$$

Обычным образом показывается, что определение поля $\vec{v}^c$, называемого нами полным лифтом поля $\vec{v}$, не зависит от выбора адаптированной системы координат.

Теорема 2. *Пусть $\vec{v}$ — инфинитезимальная изометрия многообразия M. Тогда векторное поле $\vec{v}^c$ является инфинитезимальной изометрией метрики полного лифта.*

Доказательство. Воспользуемся выражением производной Ли в неголономных координатах:

$$L_{\vec{w}} g_{AB} = \vec{w} g_{AB} + \varepsilon_A w^D g_{DB} + \varepsilon_B w^D g_{AD} -$$

$$-R^D_{CA} w^C g_{DB} - R^D_{CB} w^C g_{AD}. \tag{6}$$

Здесь R_{AB}^{D} — компоненты объекта неголономности базиса $(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+b})$:

$$R_{ab}^{n} = 2\omega_{ba}, \ R_{ab}^{n+c} = R_{bad}^{c} x^{n+d},$$

$$R_{an}^{n+c} = x^{n+d} \partial_n \Gamma_{ad}^{c}, \ R_{a\,n+b}^{n+c} = \Gamma_{ab}^{c}.$$

Остальные компоненты R_{AB}^{D} равны нулю. Вычислим компоненты $L_{\vec{w}} g_{AB}$ для некоторых наборов индексов с учетом равенств (2—6). Пусть $\vec{w} = v^{c}$. Тогда

$$\vec{w} = v^a \vec{\varepsilon}_a + x^{n+d} (\vec{e}_d v^b) \partial_{n+b}.$$

Если $A = a, \ B = b,$ то

$$L_{\vec{w}} g_{ab} = \vec{\varepsilon}_a w^{n+d} g_{db} + \vec{\varepsilon}_b w^{n+d} g_{ad} - R_{Ca}^{n+d} w^C g_{db} -$$

$$-R_{Cb}^{n+d} w^C g_{ad} = \vec{\varepsilon}_a w^{n+d} g_{db} + \vec{\varepsilon}_b w^{n+d} g_{ad} - R_{cae}^{d} x^{n+e} w^c g_{db} +$$

$$+\Gamma_{ca}^{d} w^{n+c} g_{db} - R_{cbe}^{d} x^{n+e} w^c g_{ad} + \Gamma_{cb}^{d} w^{n+c} g_{ad} = x^{n+d} \vec{e}_d \left(L_{\vec{v}} g_{ab}\right).$$

Для других значений индексов *A, B* получаются аналогичные выражения, из которых следует, что равенство $L_{\vec{v}} g = 0$ влечет равенство $L_{\vec{v}^c} G = 0.$

Список литературы

1. *Галаев С.В.* Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 16—22.

2. *Tanno S.* Killing vectors and geodesic flow vectors on tangent bundles // J. Reine Angew. Math. 1976. №282. P. 162—171.

3. *Галаев С.В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью // Математические заметки СВФУ. 2015. Т. 22, №1. С. 25—34.

4. *Букушева А.В.* О геометрии контактных метрических пространств с φ-связностью // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер.: Математика. Физика. 2015. №17, вып. 40. С. 20—24.

5. *Букушева А.В., Галаев С.В.* Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. вузов. Матем. 2013. №4. С. 10—18.

6. *Галаев С.В.* Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Изв. вузов. Матем. 2014. №8. С. 42—52.

7. *Вагнер В.В.* Геометрия (n – 1)-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М., 1941. Вып. 5. С. 173—255.

A. Bukusheva

Isometric transformations of a prolonged almost contact metric structures with the complete lift metric

We consider the almost contact metric space with intrinsic metric connection. Extended Riemann structure with the complete lift metric is determined on distribution of almost contact metric structure. We study infinitesimal isometry of extended structure. It is shown that the total admissible lift infinitesimal isometry of base is isometry metric of complete lift.

УДК 513

И.М. Бурлаков
Тверской государственный университет
don.burlakoff@yandex.ru

Калибровочные алгебры на гладких многообразиях

Рассматриваются расслоения линейных алгебр на гладких многообразиях. Сечения расслоения линейных алгебр образуют калибровочную алгебру. Действие на этой алгебре фиксированной подгруппы мультипликативной группы определяет поля линейных геометрических объектов на базовом мно-