УДК 514.76

А. В. Букушева[1]
[1] *Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*
bukusheva@list.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-5

Поднятие полуинвариантных подмногообразий на распределения почти контактных метрических многообразий

Изучаются гладкие сечения $X \in \Gamma(D)$ распределений D почти контактных метрических многообразий *M*. Доказывается, что если $U \in \Gamma(D)$ — ковариантно постоянное векторное поле относительно N-связности ∇^N, а подмногообразие $\tilde{M}$ многообразия *M* — полуинвариантное подмногообразие, то $U(\tilde{M})$ — полуинвариантное подмногообразие продолженной структуры на распределении *D* многообразия *M*.

Ключевые слова: почти контактное метрическое многообразие, сечение распределения, полуинвариантное подмногообразие, продолженная почти контактная метрическая структура.

Введение

Геометрия сечений касательных расслоений с метрикой Сасаки изучалась в работах [7; 10]. Так, например, в работе [10] было показано, что ковариантно постоянное векторное поле определяет вполне геодезическое подмногообразие касательного расслоения. Автором статьи изучались сечения распределения субриманова многообразия контактного типа [2].

Поступила в редакцию 15.05.2020 г.

Предварительно на распределении с помощью внутренней связности задавалась риманова метрика типа Сасаки. Пусть $\tilde{M} \subset M$ — подмногообразие многообразия M. Тогда допустимое векторное поле $U \in \Gamma(D)$ определяет подмногообразие $U(\tilde{M}) \subset D$ многообразия D. В настоящей работе доказывается, что если $U \in \Gamma(D)$ — ковариантно постоянное векторное поле относительно N-связности ∇^N, а подмногообразие $\tilde{M}$ многообразия M — полуинвариантное подмногообразие, то $U(\tilde{M})$ — полуинвариантное подмногообразие продолженной структуры на распределении D. Полуинвариантные подмногообразия ввел в рассмотрение А. Бежанку [8].

1. Продолженные почти контактные метрические структуры

Под M будем понимать почти контактное метрическое многообразие с заданной на нем структурой $\left(M, \vec{\xi}, \eta, g, \varphi, D\right)$, где η — 1-форма, порождающая распределение D: $D = \ker(\eta)$; $\vec{\xi}$ — векторное поле, порождающее оснащение $D^{\perp}$ распределения D: $D = span(\vec{\xi})$, g — риманова метрика на многообразии M, относительно которой распределения D и $D^{\perp}$ взаимно ортогональны. При этом выполняются равенства $\eta(\vec{\xi}) = 1$ и $g(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = 1$.

Назовем D распределением почти контактной метрической структуры. Для проведения необходимых вычислений будем использовать атлас карт $K(x^{\alpha})$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n$; $a, b, c = 1, \ldots, n-1$, $i, j, k = 1, \ldots, 2n-1$) таких, что $\partial_n = \vec{\xi}$ [1]. Введем оператор проектирования $P\colon TM \to D$, определяемый разложением

$TM = D \oplus D^{\perp}$. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы в каждой точке и порождают систему D: $D = span(\vec{e}_a)$. Легко проверить, что $\left[\vec{e}_a, \vec{e}_b\right] = 2\omega_{ba}\partial_n$.

Рассмотрим допустимые тензорные поля [3; 4] следующего вида:

$$hX = \frac{1}{2}\left(L_{\vec{\xi}}\varphi\right)(X),\ C(X,Y) = \frac{1}{2}\left(L_{\vec{\xi}}g\right)(X,Y),$$
$$\omega(X,Y) = g(\psi X, Y),\ g(CX,Y) = C(X,Y),\ X,Y \in \Gamma(TM).$$

В адаптированных координатах имеем

$$h_b^a = \frac{1}{2}\partial_n \varphi_b^a,\ C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab},\ C_b^a = g^{da}C_{db},\ \psi_a^c = g^{bc}\omega_{ab}.$$

Обозначим коэффициенты связности Леви-Чивиты тензора g с помощью символов $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$. Имеет место следующее предложение [5].

Предложение 1. *Коэффициенты связности Леви-Чивиты контактного метрического многообразия в адаптированных координатах принимают вид*

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}\left(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}\right),\ \Gamma_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab},$$
$$\Gamma_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b + \psi_a^b,\ \Gamma_{na}^n = \tilde{\Gamma}_{nn}^a = 0.$$

Пусть $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D)$, где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей, внутренняя линейная метрическая связность [3; 4].

Коэффициенты связности ∇ задаются соотношениями $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c$. Формулы преобразования для коэффициентов связности имеют обычный вид:

$$\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_{c'}^c \Gamma_{a'b'}^{c'} + A_{c'}^c \vec{e}_a A_b^{c'}.$$

Говорят, что над распределением D задана связность, если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \to M$ — естественная проекция, раскладывается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, причем VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D.

Гладкая структура на распределении D задается следующим образом. Каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ многообразия M ставится в соответствие сверхкарта $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на многообразии D, где x^{n+a} — координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$. Задание связности над распределением сводится к заданию объекта $G_b^a\left(x^\alpha, x^{n+a}\right)$ такого, что $HD = span\left(\vec{\varepsilon}_a\right)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$.

Если ∇ — внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением HD, и N: $D \to D$ — поле допустимого тензора типа (1,1), то N-продолженной связностью назовем связность в векторном расслоении (D, π, M), определяемую разложением $TD = \tilde{H}\tilde{D} \oplus VD$, такую, что $\tilde{H}\tilde{D} = HD \oplus Span\left(\vec{\varepsilon}\right)$, где $\vec{\varepsilon} = \partial_n - (NX)^v$, $X \in D$, $(NX)^v$ — вертикальный лифт. В базисе $(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ поле $\vec{\varepsilon}$ получает следующее координатное представление:

$$\vec{\varepsilon} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}.$$

Допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{P[X,Y]} Z - P\left[Q[X,Y], Z\right],$$

где $Q = I - P$, названо Вагнером [5] тензором кривизны Схоутена. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид

$$R_{abc}^d = 2\vec{e}_{[a} \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e|}^d \Gamma_{b]c}^e.$$

Назовем тензор Схоутена тензором кривизны распределения D, а распределение D, в случае обращения в нуль тензора Схоутена, — распределением нулевой кривизны. Частные производные $\partial_n \Gamma^a_{bc} = P^a_{bc}$ являются компонентами допустимого тензорного поля, обозначаемого в дальнейшем $P(X,Y)$.

Векторные поля

$$(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - \Gamma^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b}, \vec{\varepsilon} = \partial_n - N^a_b x^{n+b} \partial_{n+a}, \partial_{n+a})$$

задают на D адаптированное поле базисов, а формы

$$(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc} x^{n+c} dx^b + N^a_b x^{n+b} dx^n) —$$

сопряженное поле кобазисов. Имеют место следующие структурные уравнения:

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b\right] = 2\omega_{ba}\vec{\varepsilon} + x^{n+d}(2\omega_{ba} N^c_d + R^c_{bad})\partial_{n+c},$$

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}\right] = x^{n+d}(\partial_n \Gamma^c_{ad} - \nabla_a N^c_d)\partial_{n+c},$$

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}\right] = \Gamma^c_{ab} \partial_{n+c},$$

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+a}\right] = N^c_a \partial_{n+c}.$$

Определим на многообразии D почти контактную структуру $(\tilde{D}, J, \vec{\varepsilon}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$, полагая

$$J\, X^h = (\varphi X)^h,\ \ J\, X^v = (\varphi X)^v,\ \ J(\vec{\varepsilon}) = \vec{0}.$$

Здесь $\pi : D \to M$ — естественная проекция. Определим на многообразии D метрику $\tilde{g}$, подчиняющуюся равенствам

$$\tilde{g}(X^h, Y^h) = \tilde{g}(X^v, Y^v) = g(X, Y),$$
$$\tilde{g}(X^h, Y^v) = \tilde{g}(X^h, \vec{\varepsilon}) = \tilde{g}(X^v, \vec{\varepsilon}) = 0.$$

Назовем почти контактную метрическую структуру $(\tilde{D}, J, \vec{\varepsilon}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$ продолженной структурой.

2. Поднятие полуинвариантных подмногообразий

Пусть $U \in \Gamma(D)$ — допустимое векторное поле и ∇^N — N-связность на почти контактном метрическом многообразии *M*. Для каждого вектора $\vec{v} \in TM$, $\vec{v} = v^a \vec{e}_a + v^n \partial_n$ определяется его горизонтальный лифт $\vec{v}^h = v^a \vec{\varepsilon}_a + v^n \vec{\varepsilon}$. Допустимое векторное поле $U \in \Gamma(D)$ определяет гладкое сечение *U: M→D*. Пусть $U_* : TM \to TD$ — соответствующее касательное линейное отображение. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $U \in \Gamma(D)$ *— допустимое векторное поле,* ∇^N *— N-связность на почти контактном метрическом многообразии M и* $\vec{v} \in TM$ *— произвольный касательный к многообразию M вектор. Тогда выполняется следующее условие*:

$$\nabla^N_{\vec{v}} U = 0 \Leftrightarrow U_*(\vec{v}) = \vec{v}^h.$$

Условие $\nabla^N_{\vec{v}} U = 0$ в адаптированных координатах перепишется в виде

$$v^a(\vec{e}_a U^b + \Gamma^b_{ac} U^c) = 0, \ \ v^n(\partial_n U^b + n^b_c U^c) = 0.$$

Переписывая в адаптированных координатах условие $U_*(\vec{v}) = \vec{v}^h$, после некоторых преобразований убеждаемся в справедливости теоремы.

Подмногообразие $\tilde{M}$ многообразия *M* назовем полуинвариантным подмногообразием [8], если существует гладкое распределение $\tilde{D} : x \to \tilde{D}_x \subset T_x(\tilde{M})$ на многообразии $\tilde{M}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\tilde{D}$ — инвариантное относительно эндоморфизма φ распределение, то есть $\varphi(\tilde{D}_x) \subset \tilde{D}_x$ для всех $x \in \tilde{M}$;

2) дополнительное ортогональное распределение

$$\tilde{D}^{\perp} : x \to \tilde{D}_x^{\perp} \subset T_x(\tilde{M})$$

антиинвариантно, то есть $\varphi(\tilde{D}_x^{\perp}) \subset T_x(\tilde{M})^{\perp}$ для всех $x \in \tilde{M}$.

Теорема 2. *Пусть* $U \in \Gamma(D)$ *— ковариантно постоянное векторное поле относительно N-связности* ∇^N, *а подмногообразие* $\tilde{M}$ *многообразия M — полуинвариантное подмногообразие, тогда* $U(\tilde{M})$ *— полуинвариантное подмногообразие продолженной структуры на распределении D многообразия M*.

Доказательство. Используя теорему 1, непосредственно проверяем, что выполняются следующие равенства:

$$J(U_*(\tilde{D})) \subset U_*(\tilde{D}), \;\; J(U_*(D^{\perp})) \subset U_*(T\tilde{M})^{\perp},$$

что и доказывает теорему.

Заключение

Справедливость теоремы 2 не зависит от выбора эндоморфизма N. В то же время свойства полуинвариантного подмногообразия $\tilde{M}$ зависят от класса почти контактного метрического многообразия *M*, а свойства продолженной структуры — от выбора эндоморфизма N [5; 6]. Последнее замечание служит мотивацией для дальнейшего исследования проблемы поднятия полуинвариантных подмногообразий на распределения почти контактных метрических многообразий.

Список литературы

1. *Букушева А.В.* О тензоре Схоутена — Вагнера неголономного многообразия Кенмоцу // Тр. семин. по геометрии и математическому моделированию. 2019. №5. С. 15—19.

2. *Букушева А.В.* Геодезические подмногообразия распределений субримановых многообразий // Математика и естественные науки. Теория и практика : межвуз. сб. науч. тр. Ярославль, 2019. С. 23—27.

3. *Букушева А.В., Галаев С.В.* О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию // Математика. Механика. 2005. №7. С. 12—14.

4. *Букушева А.В., Галаев С.В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, №3. С. 17—22.

5. *Галаев С.В.* Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Изв. Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, №3. С. 258—263.

6. *Галаев С.В.* Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Изв. Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, №2. С. 138—147.

7. *Ямпольский А.Л.* О вполне геодезических векторных полях на подмногообразии // Мат. физ., анализ, геометрия. 1996. Т. 1, №1—2. С. 540—545.

8. *Bejancu A*. Geometry of CR-Submanifolds. Springer, 1986.

9. *Bukusheva A. V., Galaev S. V.* Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4 (53), №2. P. 13—22.

10. *Walczak P*. On totally geodesic submanifolds of tangent bundle with Sasaki metric // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. 1989. Vol. 28, iss. 3—4. P. 161—165.

A. Bukusheva[1]

[1] Saratov State University

83 Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russia

bukusheva@list.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-5

Lifting semi-invariant submanifolds to distribution of almost contact metric manifolds

Submitted on May 15, 2020

Let M be an almost contact metric manifold of dimension $n = 2m + 1$. The distribution D of the manifold M admits a natural structure of a smooth manifold of dimension $n = 4m + 1$. On the manifold M, is defined

a linear connection ∇^N that preserves the distribution *D*; this connection is determined by the interior connection that allows parallel transport of admissible vectors along admissible curves. The assigment of the linear connection ∇^N is equivalent to the assignment of a Riemannian metric of the Sasaki type on the distribution *D*. Certain tensor field of type (1,1) on *D* defines a so-called prolonged almost contact metric structure. Each section $U \in \Gamma(D)$ of the distribution D defines a morphism $U : M \to D$ of smooth manifolds. It is proved that if $\tilde{M} \subset M$ a semi-invariant submanifold of the manifold *M* and $U \in \Gamma(D)$ is a covariantly constant vector field with respect to the N-connection ∇^N, then $U(\tilde{M})$ is a semi-invariant submanifold of the manifold *D* with respect to the prolonged almost contact metric structure.

Keywords: almost contact metric manifold; section of a distribution; semi-invariant manifold; prolonged almost contact metric structure.

References

1. *Bukusheva, A. V.:* On the Schouten — Wagner tensor of a nonholonomic Kenmotsu manifold. Proceedings of the seminar on geometry and mathematical modeling, 5, 15—19 (2019).

2. *Bukusheva, A. V.:* Geodesic submanifolds of distributions of sub-Riemannian manifolds. Mathematics and science. Theory and practice. Interuniversity collection of scientific papers. Yaroslavl. 23—27 (2019).

3. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* On an admissible Kähler structure on a tangent bundle to a nonholonomic manifold. Mathematics. Mechanic, 7, 12—14 (2005).

4. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* Almost contact metric structures defined by connection over distribution with admissible Finslerian metric. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., **12**:3, 17—22 (2012).

5. *Galaev, S. V.:* Almost contact metric spaces with N-connection. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., **15**:3, 258—263 (2015).

6. *Galaev, S. V.:* Extended Structures on Codistributions of Contact Metric Manifolds. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., **17**:2, 138—147 (2017).

7. *Yampolsky, A. L.*: On completely geodesic vector fields on a submanifold. Mat. physical, analysis, geometry, **1**:1-2, 540—545 (1996).

8. *Bejancu, A.*: Geometry of CR-Submanifolds. Springer (1986).

9. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* Almost contact metric structures defined by connection over distribution. Bull. of the Transilvania University of Brasov, Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics, **4** (53):2, 13—22 (2011).

10. *Walczak, P.*: On totally geodesic submanifolds of tangent bundle with Sasaki metric. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math., **28**:3-4, 161—165 (1989).