$$\gamma^4_{(\alpha\beta)} = diag\,(\varepsilon_1\lambda_1,\ \varepsilon_2\lambda_2),\ \lambda_1 \neq \lambda_2\ ; \tag{5}$$

определитель девятнадцатого порядка

$$\det\left(\frac{\partial(J_1, J_2, \ldots, J_{19})}{\partial(\gamma^3_{\alpha\beta},\ \overset{*}{\gamma}{}^4_{\alpha\beta}|_{\alpha\leq\beta},\ \gamma^3_{\alpha 3}, \ldots, \gamma^3_{44}}\right)$$

равен (с точностью до знака) произведению следующих, вообще говоря, отличных от нуля определителей:

$$\det\left(\frac{\partial(J_1, J_2, J_3, J_4)}{\partial(\gamma^3_{\alpha\beta})}\right) = \pm 2(\lambda_1 - \lambda_2)\gamma^3_{(12)},$$

$$\det\left(\frac{\partial(J_5, J_6, J_7)}{\partial(\gamma^4_{\alpha\beta}|_{\alpha\leq\beta})}\right) = \pm 2(\lambda_1 - \lambda_2)\gamma^4_{12},$$

$$\det\left(\frac{\partial(J_8, J_9)}{\partial(\gamma^3_{13}, \gamma^3_{23})}\right) = \pm 4(\lambda_1 - \lambda_2)\gamma^3_{13}\gamma^3_{23}, \ldots,$$

$$\det\left(\frac{\partial(J_{16}, J_{17})}{\partial(\gamma^3_{41}, \gamma^3_{42})}\right) = \pm 4(\lambda_1 - \lambda_2)\gamma^3_{41}\gamma^3_{42},$$

что и доказывает теорему.

Условие (5) означает, что у тензора $\gamma^4_{(\alpha\beta)}$ различные собственные значения λ_α и он уже отнесен к своим главным осям.

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий// Тр.Моск.матем.о-ва/ ГИТТЛ.М.,1953.Т.2.С.275-382.

2. И в а н о в В.Г. Геометрия пары векторных полей в псевдоримановом пространстве// Вестн.Белорус.ун-та.Физ.,матем. и мех.1985.№3. С.52-54.

УДК 514.76

ОБ АФФИННЫХ РАССЛОЕНИЯХ $A^{\tau}_{n,m}$ $(\tau < n,\ \tau < m)$

Е.Т.И в л е в
(Томский политехнический институт)

В статьях [1]-[3] изучались регулярные аффинные расслоения с n-мерной дифференцируемой базой M_n и m-мерными аффинными слоями A_m с заданными точечными сечениями и с заданной аффинной связностью C, причем $\tau = Rang\,[A^\alpha_i] = min\ (m,n)$.

В данной статье изучается аффинное расслоение $A^{\tau}_{n,m}$-расслоение $A_{n,m}$, у которого $\tau < m$ и $\tau < n$. Все построения носят локальный

характер, а функции, встречающиеся в статье, предполагаются аналитическими. Обозначения и терминология соответствует принятым в [1]-[3]. В дальнейшем символом ([k], (s)) будем обозначать формулу под номером s статьи [k].

1. Рассматривается аффинное расслоение $A_{n,m}$ в смысле [3] с n-мерной дифференцируемой базой M_n и m-мерными аффинными слоями A_m. При этом предполагается, что в расслоении $A_{n,m}$ задано точечное гладкое сечение $(u)\to B(u)$, $(u)\in M_n$, $B(u)\in A_m(u)$ и C-аффинная связность. Дифференциальные уравнения секущей n-поверхности M^o_n с текущей точкой B записываются в виде ([3],(5)).

Рассмотрим на базе M_n кривую, проходящую через точку (u):

$$k(t):\ \ \theta^i = t^i\theta,\ \ \mathcal{D}\theta = \theta\wedge\theta_1,\ \ \nabla t^i - t^i\theta_1 = t^i_1\theta. \tag{1}$$

Из ([3],(2)-(5)) в силу (1) заключаем, что направлению $t = t^i(\vec{A}\vec{e}_i)\in L_n$, отвечающему касательной к кривой $k(t)$ в точке $(u)\in M_n$ в слое $A_m(u)$ расслоения $A_{n,m}$, соответствует направление $\tau = (\vec{B}\vec{E}_\alpha)\tau^\alpha \in A_m(u)$, где

$$\tau^\alpha = A^\alpha_i t^i. \tag{2}$$

Это направление является касательным к развертке кривой $\overset{*}{k}(t)$ в слое $A_m(u)$, проходящей через точку B: $\overset{*}{k}(t)$: $\omega^\alpha = \tau^\alpha\theta$, в которую переходит кривая $k(t)$ при отображении $A_m(u+du)\to A_m(u)$ вдоль этой же кривой. Поэтому в дальнейшем направление τ будем называть разверткой направления $t \in L_n$ на слой A_m. Линейное подпространство $\overset{*}{L}(u) \subset A_m(u)$, $\overset{*}{L}(u) \ni B(u)$ точки $(u)\in M_n$ расслоения $A_{n,m}$ будем называть разверткой линейного подпространства $L(u)\subset L_n(u)$, $L_n(u)\ni A(u)$, если $\overset{*}{L}(u) = \{\tau(u)\,|\,\tau^\alpha(u) = A^\alpha_i(u)t^i(u),\ \tau(u)\in A_m(u)\}$.

2. О п р е д е л е н и е 1. Расслоением $A^{\tau}_{n,m}$ называется такое аффинное расслоение $A_{n,m}$ $(n>1,\ m>1)$, у которого

$$\tau = Rang\,[A^\alpha_i] < min\ (n,m) \tag{3}$$

на базе M_n. В случае $\tau = min(n,m)$ аффинное расслоение $A_{n,m}$ $(n>1,\ m>1)$ называется регулярным.

Из (3) вытекают следующие соотношения для элементов матрицы $[A^\alpha_i]$:

$$A^{\hat a}_{i_1} = A^{j_1}_{i_1} C^{\hat a}_{j_1},\ \ A^{i_1}_{i_2} = A^{i_1}_{j_1} C^{j_1}_{i_2},\ \ A^{\hat a}_{i_2} = C^{i_1}_{i_2} A^{\hat a}_{i_1},\ \ \det\,[A^{j_1}_{i_1}] \neq 0, \tag{4}$$

$$(a, b, c, i_1, j_1, k_1 = \overline{1,\tau};\ i_2, j_2, k_2, \hat a, \hat b, \hat c = \overline{\tau+1, m};\ \alpha,\beta,\gamma = \overline{1,m}).$$

Здесь C^α_i -коэффициенты соответствующих линейных комбинаций. Проведем в слоях $A_m(u)$ и $L_n(u)$ точки $u\in M_n$ расслоений $A^{\tau}_{n,m}$ и L^1_n нижеследующую фиксацию аффинных реперов, из которой с учетом ([3],(I),(3),(5)) и (4) вытекают соответствующие дифференциальные уравнения:

$$A^{j_1}_{i_1}=\delta^{j_1}_{i_1},\ A^{\hat a}_{i_1}=0,\ A^{j_1}_{i_2}=0\Rightarrow A^{\alpha}_{i_2}=0\Rightarrow A^{\hat a}_{i_2}=0\Rightarrow R^{\hat a}_{0 i_2 j}=0,\ A^{\hat a}_{i_2 j}=0; \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\omega^{\hat a}_{j_1}=A^{\hat a}_{j_1 k_1}\theta^{k_1},\quad \theta^{i_1}_{i_2}=A^{i_1}_{i_2 k}\theta^{k},\quad \omega^{j_1}_{i_1}-\theta^{j_1}_{i_1}=A^{j_1}_{i_1 k}\theta^{k},\\ \nabla A^{\hat a}_{j_1 k}=A^{\hat a}_{j_1 k\ell}\theta^{\ell},\ \nabla A^{i_1}_{i_2 k}-\theta^{i_1}_{i_2 k}=A^{i}_{i_2 k\ell}\theta^{\ell},\ \nabla A^{j_1}_{i_1 k}-\theta^{j_1}_{i_1 k}=A^{j_1}_{i_1 k\ell}\theta^{\ell}.\end{gathered} \tag{6}$$

Из (I)-(6) и ([3],(2)) следует, что расслоение $A^{\tau}_{n,m}$ характеризуется тем, что каждой точке $(u)\in M_n$ соответствуют в $A_m(u)$ и $L_n(u)$ линейные подпространства

$$\Gamma_2=(\bar B\bar\varepsilon_1\bar\varepsilon_2\ldots\bar\varepsilon_\tau)\subset A_m,\quad L^{2}_{n-\tau}=(\bar A\bar e_{\tau+1}\ldots\bar e_n), \tag{7}$$

где Γ_2 -развертка пространства $L_n(u)$ на слой $A_m(u)$, а $L^2_{n-\tau}(u)$-совокупность всех таких направлений $t\in L_n(u)$, отвечающих касательным к кривым (I), вдоль которых точка $B(u)\in A_m(u)$ каждой точки $(u)\in M_n$ переносится параллельно в аффинной связности C. Из ([3],(2),(5)),(5) и (7) вытекает следующее

Утверждение 1. Линейное подпространство $L_\tau(u)\in A_m(u)$ каждой точки $(u)\in M_n$ расслоения $A^{\tau}_{n,m}$ параллельно переносится в аффинной связности C вдоль распределения $\Delta^2_{n-\tau}$, определяемого $(n-\tau)$-плоскостью $L^2_{n-\tau}(u)\subset L_n(u)$, причем (см. [4], (8))

$$R(v,w)\,B(u)\in\Gamma_\tau(u),\quad \forall v,w\in L^2_{n-\tau}(u).$$

3. Определение 2. Расслоение $A^{\tau}_{n,m}$ ($n>1$, $m>1$) называется оснащенным, если каждой точке $(u)\in M_n$ в слоях $A_m(u)$ и $L_n(u)$ можно поставить в соответствие линейные подпространства:

$$\left.\begin{aligned}&P_{m-\tau}\subset A_m(u):\ x^a=b^a_{\hat a}x^{\hat a},\quad \nabla b^a_{\hat a}=b^a_{\hat a i}\theta^i;\\ &L^1_\tau\subset L_n(u):\ V^{i_2}=a^{i_2}_{i_1}v^{i_1},\quad \nabla a^{i_2}_{i_1}+\theta^{i_2}_{i_1}+a^{j_2}_{i_1}a^{i_2}_{j_1}\theta^{j_1}_{j_2}=a^{i_2}_{i_1 j}\theta^j.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Каждой точке $X(u)\in A_m(u)$: $\bar X(u)=\bar B(u)+x^{\alpha}(u)\bar\varepsilon_\alpha(u)$

и $(\tau-1)$-плоскости $\Gamma_{\tau-1}(u)\subset\Gamma_\tau(u)$, $\Gamma_{\tau-1}\supset B(u)$: $y_a x^a=0$, $x^{\hat a}=0$

в силу (8),(7) и ([4],(8)) отвечает в $L_n(u)$ линейный гиперкомплекс

$$\begin{gathered}K(X,\Gamma_{\tau-1})=\{(v,w)\mid R(v,w)X\in(\Gamma_{\tau-1}\cup P_{m-\tau})\}:\ y_a x^{J}\tilde R^{a}_{Jjk}v^{j}w^{k}=0,\\ \tilde R^{a}_{Jjk}=R^{a}_{Jjk}-b^{a}_{\hat a}R^{\hat a}_{Jjk}\quad (x^0=1).\end{gathered} \tag{9}$$

Отсюда следует, что точке $X(u)\in A_m(u)$ направлению $v(u)=(\bar A(u),\bar e_i(u))\,v^i(u)\in L_n(u)$ и τ-плоскости $L^1_\tau(u)\subset L_n(u)$ отвечает аффинное преобразование τ-плоскости Γ_τ в себя с центром в точке B:

$$\tilde\Pi(X,v,L^1_\tau)=\{x^{J}(\tilde R^{i_1}_{Jj_1k}+\tilde R^{i_1}_{Jj_2k}a^{j_2}_{j_1})v^{k}\}\quad (x^0=1). \tag{10}$$

Это преобразование каждую $(\tau-1)$-плоскость $\Gamma_{\tau-1}\subset\Gamma_\tau$ переводит в $(\tau-1)$-плоскость $\overset{*}{\Gamma}_{\tau-1}\subset\Gamma_\tau$ -развертку $(\tau-1)$-плоскости $L_{\tau-1}\subset L^1_\tau$, отвечающей направлению $v\in L_n$ в нуль-системе (9). Из (10) заключаем, что направлению $v(u)\in L_n(u)$ и τ-плоскости $L_\tau(u)\in L_n(u)$ точки $(u)\in M_n$ отвечает в $A_m(u)$ гиперплоскость:

$$\begin{gathered}E_{m-1}(v,L^1_\tau)=\{X\mid\tilde\Pi(X,v,L^1_\tau)\to W\}:\ x^{J}\overset{*}{R}{}^{i_1}_{Ji_1k}v^{k}=0,\\ \overset{*}{R}{}^{i_1}_{Ji_1k}=\tilde R^{i_1}_{Ji_1k}+a^{j_2}_{i_1}\tilde R^{i_1}_{Jj_2k}.\end{gathered} \tag{11}$$

Здесь $\tilde\Pi\to W$ означает, что преобразование $\tilde\Pi$ является преобразованием с нулевым следом.

4. Определение 3. Оснащение расслоения $A^{\tau}_{n,m}$ называется квазиглавным, если на базе M_n выполняются следующие условия:

$$\left.\begin{aligned}&1.\ E_{m-1}(v,L^1_\tau)\parallel\Gamma_\tau,\quad \forall v\in L^2_{n-\tau};\\ &2.\ E_{m-1}(v,L^1_\tau)\parallel P_{m-\tau},\quad \forall v\in L^1_\tau.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

При этом нормали L^1_τ и $P_{m-\tau}$ называются квазиглавными.

Из (11) и (12) в силу (9) следует, что подпространства $L^1_\tau\subset L_n$ и $\Gamma_\tau\subset A_n$ являются квазиглавными в смысле определения 3 тогда и только тогда, когда

$$\left\{\begin{aligned}&R^{\hat a}_{aj_2k_2}a^{j_2}_{i_1}b^{i_1}_{\hat a}+R^{i_1}_{ak_2j_2}a^{j_2}_{i_1}+R^{\hat a}_{ai_1k_2}b^{i_1}_{\hat a}+R^{i_1}_{ak_2i_1}=0,\\ &R^{\hat b}_{\hat a k_2 j_2}a^{j_2}_{i_1}a^{k_2}_{k_1}b^{i_1}_{\hat b}+\ldots+R^{i_1}_{ai_1k_1}b^{a}_{\hat a}+R^{\hat b}_{\hat a k_1 i_1}b^{i_1}_{\hat b}+R^{i_1}_{\hat a j_2 k_1}a^{j_2}_{i_1}+R^{i_1}_{\hat a i_1 k_2}a^{k_2}_{k_1}+R^{i_1}_{\hat a i_1 k_1}=0.\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Отсюда вытекает следующая

Теорема 1. Каждой точке $(u)\in M_n$ расслоения $A^{\tau}_{n,m}$ отвечает конечное число квазиглавных нормалей $L^1_\tau(u)\subset L_n(u)$ и $\Gamma_\tau(u)\subset A_m(u)$.

5. Из определения 1 в [1], ([1],(11)), теоремы 1 в [3], ([3],(13)) и (13) вытекают следующие утверждения:

Утверждение 2. Линейное подпространство $P_{m-\tau}(u)\subset A_m(u)$ каждой точки $(u)\in M_n$ расслоения $A^{\tau}_{n,m}$ является основной нормалью подрасслоения $\bar A_{n,\tau}=(M_n,\Gamma_\tau)$ относительно аффинных преобразований $\bar R(v,w)$, $v,w\in L_n(u)$, каждое из которых является ограничением соответствующего аффинного преобразования $R(v,w)$, $v,w\in L_n$ на τ-

плоскость Γ_τ в направлении $P_{m-\tau}$.

Утверждение 3. Линейное подпространство $P_{m-\tau}(u) \subset A_m(u)$ каждой точки $(u) \in M_n$ аффинного расслоения $A^\tau_{n,m}$ является главной τ-плоскостью подрасслоения $\bar{A}_{n,\tau}$ относительно аффинного преобразования $\bar{R}(v,w)$, $v,w \in L_n$.

Замечание. Анализ дифференциальных уравнений (6), в которых величины $A^{\hat{a}}_{jk\ell}$, $A^{i_1}_{i_2 k\ell}$ и $A^{j_1}_{i_1 k\ell}$ в общем случае не симметричны по индексам k и ℓ, убеждает нас в том, что расслоение $A^\tau_{n,m}$ ($n>1$, $m>1$) существует и определяется с произволом $\tau_n = \tau(n^2-\tau^2+2m)$ функций n аргументов.

6. Рассматривается аффинное расслоение $Q_{n,m}=(M_n,Q_m)$ в смысле [3] (см.п.8). Из ([3],(I7)) в силу (4) и (5) следует, что расслоение $Q_{n,m}$ будет расслоением $Q_{n,m}$ класса $A^\tau_{n,m}$ тогда и только тогда, когда на базе M_n выполняются соотношения

$$A^{j_1}_{0i_1}=\delta^{j_1}_{i_1},\ A^{\hat{a}}_{0i}=0,\ A^{j_2}_{0i_2}=0 \Rightarrow A^{\alpha}_{0i_2}=0;\ \Omega^{i_1}=\theta^{i_1},\ \Omega^{\hat{a}}=0,$$
$$\Omega^{\hat{a}}_{j_1}=A^{\hat{a}}_{0j_1k_1}\theta^{k_1},\ \theta^{i_1}_{i_2}=A^{i_1}_{0i_2k}\theta^{k},\ \Omega^{j_1}_{i_1}-\theta^{j_1}_{i_1}-\delta^{j_1}_{i_1}\Omega^{0}_{0}=A^{j_1}_{0i_1k}\theta^{k}. \qquad (I4)$$

Отсюда и из ([3],(I8)) получаются следующие соотношения на M_n:

$$\begin{cases} R^{\hat{a}}_{aj_2k_2}=0,\quad R^{i_1}_{ak_2j_2}=0,\quad R^{\hat{a}}_{ai_1k_2}=0,\quad R^{i_1}_{ak_2i_1}=\frac{1}{2}(\tau+1)A^{0}_{ak_2}, \\ R^{\hat{b}}_{\hat{a}k_2j_2}=0,\quad R^{\hat{b}}_{ak_1j_1}=0,\quad R^{i_1}_{\hat{a}j_2k_2}=0,\quad R^{\hat{b}}_{\hat{a}k_2i_1}=\frac{1}{2}\delta^{\hat{b}}_{\hat{a}}A^{0}_{i_1k_2}, \\ R^{\hat{b}}_{\hat{a}k_1i_1}=\frac{1}{2}\delta^{\hat{b}}_{\hat{a}}(A^{0}_{i_1k_1}-A^{0}_{k_1i_1}),\quad R^{i_1}_{aj_2k_1}=\frac{1}{2}(\delta^{i_1}_{k_1}A^{0}_{aj_2}+\delta^{i_1}_{a}A^{0}_{k_1j_2}), \\ R^{i_1}_{ai_1k_1}=-\frac{1}{2}\tau A^{0}_{ak_1}+\frac{1}{2}A^{0}_{k_1a},\quad R^{i_1}_{\hat{a}i_1k_2}=-\frac{1}{2}A^{0}_{\hat{a}k_2}, \\ R^{i_1}_{\hat{a}i_1k_1}=\frac{1}{2}(1-\tau)A^{0}_{\hat{a}k_1},\quad R^{i_1}_{\hat{a}j_2k_1}=\frac{1}{2}A^{0}_{\hat{a}j_2}\delta^{i_1}_{k_1}. \end{cases} \qquad (I5)$$

Отсюда в силу ([3],(I1)) следует, что линейный гиперкомплекс $K_{n-1} \subset L_n(u)$ точки $(u) \in M_n$ аффинного расслоения $Q_{n,m}$ определяется уравнением:

$$K_{n-1}:\ A^{0}_{[i_1j_1]}v^{i_1}w^{j_1}+2A^{0}_{i_1i_2}v^{i_1}w^{i_2}=0. \qquad (I6)$$

Из (I4)-(I6) вытекают следующие утверждения:

Утверждение 4. Расслоение $Q^\tau_{n,m}$ есть расслоение $Q_{n,m}$, у которого точка A_0 описывает τ-поверхность S_τ в Q_m с касательной τ-плоскостью $\Gamma_\tau=(A_0,A_1,\dots,A_\tau)$, а $(n-\tau)$-плоскость $L^2_{n-\tau}(u) \subset L_n(u)$ каждой точки $(u) \in M_n$ есть совокупность всех таких направлений $v(u) \in L_n(u)$, вдоль которых точка $A_0(u)$ является неподвижной.

Утверждение 5. Линейное подпространство $L^2_{n-\tau}(u) \subset L_n(u)$ каждой точки $(u) \in M_n$ расслоения $Q^\tau_{n,m}$ принадлежит соответствующему линейному гиперкомплексу $K_{n-1}(u) \subset L_n(u)$.

Определение 4. Расслоением $\bar{Q}^\tau_{n,m}$ называется такое расслоение $Q^\tau_{n,m}$, у которого на базе

$$A^{0}_{ak_2}=0. \qquad (I7)$$

Эти соотношения с учетом (I4) и ([3],(I7)) приводят к соотношениям:

$$\Omega^{0}_{a}=A^{0}_{ai}\theta^{i},\ \Omega^{0}_{\hat{a}}=A^{0}_{\hat{a}i}\theta^{i},\ A^{0}_{\hat{a}k_2}A^{\hat{a}}_{0ai}+A^{0}_{ak_1}A^{k_1}_{0k_2i}=A^{0}_{ak_2i}. \qquad (I8)$$

Из (I7) и (I8) с учетом п.8 в [3] вытекает

Утверждение 6. Расслоение $\bar{Q}^\tau_{n,m}$ есть расслоение $Q^\tau_{n,m}$, у которого выполняется хотя бы одно из следующих свойств:

1. $L^2_{n-\tau}(u)$ -особое линейное подпространство для $K_{n-1}(u) \subset L_n(u)$;

2. τ-плоскость $\Gamma_\tau(u) \subset H(u)$, где $H(u)$ -характеристический элемент гиперплоскости $G_{m-1}=(A_1A_2\dots A_m) \subset Q_m(u)$ вдоль распределения $\Delta^2_{n-\tau}$.

Из (I4) и (I5) замечаем, что алгебраические уравнения (I3) приводят к соотношениям: $A^{0}_{ak_2}=0$, $A^{0}_{ak_i}\theta^{a}_{\hat{a}}+A^{0}_{\hat{a}k_1}=0$. Отсюда с учетом (8) и (I2) вытекает

Утверждение 7. Квазиглавные нормали $L^1_\tau(u) \subset L_n(u)$ и $P_{m-\tau}(u) \subset Q_m$ в случае расслоения $Q^\tau_{n,m}$ не существуют. Они существуют в случае расслоения $\bar{Q}^\tau_{n,m}$ и определяются бесчисленными способами в соответствующих пространствах Q_m и $L_n(u)$ каждой точки $(u) \in M_n$, причем характеристический элемент гиперплоскости G_{m-1} вдоль любой квазиглавной нормали $L^1_\tau(u) \subset L_n(u)$ проходит через соответствующую квазиглавную нормаль $\Gamma_{m-\tau}(u) \subset Q_m$.

Как и в случае расслоения $A^\tau_{n,m}$, показывается, что расслоения $Q^\tau_{n,m}$ и $\bar{Q}^\tau_{n,m}$ существуют и определяются с соответствующим произволом.

Библиографический список

1. Ивлев Е.Т. Об одном оснащении аффинного расслоения $A_{m,n}$ ($m<n$)//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1987.Вып.18.С.35-38.

2. Ивлев Е.Т. Об инвариантных структурах почти произведения пространства аффинной связности//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1988. Вып.19.С.39-43.

3. Ивлев Е.Т. О расслоении $A_{n,m}$ ($n<m$)//Дифференциальная гео-

6 Зак. 1209

метрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград,1989.Вып.20.С.37-42.

4.И в л е в Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,n}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч. тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1984.Вып.15.С.32-37.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОТОБРАЖЕНИЙ В P_4

С.В.К и р е е в а
(Московский автодорожный институт)

В данной работе рассматриваются свойства отображения $f:(\Omega\subset P_4)\to\to(\overline{\Omega}\subset P_4)$,которое имеет два двумерных распределения двойных линий.

В проективном пространстве P_4 заданы две диффеоморфные области $\Omega,\overline{\Omega}$ $(\Omega\cap\overline{\Omega}=\varnothing)$. Диффеоморфизм $f:\Omega\to\overline{\Omega}$ переводит точку $A\in\Omega$ в точку $B\in\overline{\Omega}$.Области $\Omega,\overline{\Omega}$ нормализованы в смысле А.П.Нордена одним и тем же семейством гиперплоскостей: $A\to\Pi_3(A)$, $B\to\Pi_3(A)$ $(B\notin\Pi_3(A))$.

Введенные нормализации определяют в областях $\Omega,\overline{\Omega}$ аффинные связности $\nabla,\overline{\nabla}$. Отображение f переводит сеть $\Sigma_4\subset\Omega$ в сеть $\overline{\Sigma}_4\subset\overline{\Omega}$. К области $\Omega,\overline{\Omega}$ присоединены подвижные реперы $\mathcal{R}^A=\{A,A_i\}$, $\mathcal{R}^B=\{B,B_i\}$ $(i=\overline{1,4})$, где A_i, B_i -нормальные точки [2] касательных к линиям ω^i, $\overline{\omega}^i$ сетей $\Sigma_4,\overline{\Sigma}_4$. Точки B, B_i в репере $\mathcal{R}^A$ имеют следующие представления:

$$\vec{B}=\vec{A}+\gamma^i\vec{A}_i\ ,\quad \vec{B}_i=\gamma^j_i\vec{A}_j\qquad (i,j,k=1,2,3,4).\qquad (*)$$

Из результатов работы [3] следует,что если относительные инварианты $\gamma^j_i=0$ $(i\neq j)$, $\gamma^1_1=\gamma^2_2\neq\gamma^3_3$, $\gamma^3_3=\gamma^4_4$, то в области Ω существуют два распределения Δ_2, $\overline{\Delta}_2$: $\Delta_2(A)=(AA_1A_2)$, $\overline{\Delta}_2(A)=(AA_3A_4)$.Эти распределения характеризуются тем,что любая линия ℓ этих распределений - двойная [1] ,причем касательные к линиям $\ell,\overline{\ell}=f(\ell)$ пересекаются в точках нормализующей плоскости $\Pi_3(A)$.В данной работе будем исследовать именно такое отображение f .Итак , для отображения f имеем:

$$\vec{B}=\vec{A}+\gamma^i\vec{A}_i\ ,\ \vec{B}_1=\gamma^1_1\vec{A}_1\ ,\ \vec{B}_2=\gamma^1_1\vec{A}_2\ ,\ \vec{B}_3=\gamma^3_3\vec{A}_3\ ,\ \vec{B}_4=\gamma^3_3\vec{A}_4\ ;\qquad (1)$$

$$\begin{cases}\overline{\omega}^i=\omega^i,\ \overline{\omega}^0_i=\gamma^i_i\omega^0_i\ ,\ \overline{\omega}^i_i=\omega^i_i+(\gamma^i_i)^{-1}\gamma^i_{im}\omega^m+\delta^i_i\gamma^k\omega^0_k\ ,\\ \overline{\omega}^i_j=(\gamma^i_i)^{-1}\gamma^i_j(\omega^i_j-\gamma^i\omega^0_j)\ (i\neq j),\ \omega^0_i=a^0_{ik}\omega^k,\ \omega^j_i=a^j_{ik}\omega^k\ (i\neq j);\end{cases}\qquad (2)$$

$$d\gamma^i-\gamma^i\omega^0_0-\gamma^i\gamma^j\omega^0_j+\omega^i+\gamma^j\omega^i_j=\gamma^i_i\omega^i,$$

$$d\gamma^i_i-\gamma^i_i(\gamma^k\omega^0_k)-\gamma^i\gamma^i_i\omega^0_i=\gamma^i_{ik}\omega^k,$$
$$\gamma^i_{jk}=\omega^i_j(\gamma^j_j-\gamma^i_i)-\gamma^i\gamma^j_j\omega^0_j\quad (i\neq j)\ ,\quad \gamma^i_{jk}=\gamma^i_{kj}\ .\qquad (3)$$

Из требований $\gamma^1_1=\gamma^2_2$ и $\gamma^3_3=\gamma^4_4$ вытекают конечные соотношения,которые мы здесь не приводим. В работе [3] также показано,что на прямой (AB) существуют инвариантные точки $N^i_i:\vec{N}^i_i=-\gamma^i_i\vec{A}+\vec{B}$. В нашем отображении f на прямой (AB) существуют две различные точки N^1_1 , N^3_3 такие,что $(AB,N^1_1N^3_3)=\gamma^3_3:\gamma^1_1\neq1$.В работе будем предполагать,что точка C: $C=(AB)\cap\Pi_3(A)$, $\vec{C}=\gamma^i\vec{A}_i$ отлична от инвариантных точек N^i_i ,т.е. $\gamma^1_1\neq1$, $\gamma^3_3\neq1$. Дифференциалы точек N^1_1, C имеют вид:

$$d\vec{C}=\widetilde{\varphi}\vec{C}+\omega^i(a^0_{ki}\gamma^k\vec{A}+(\gamma^i_i-1)\vec{A}_i),$$
$$d\vec{N}^1_1=\theta^1_1\vec{N}^1_1+\omega^1(1-\gamma^1_1)^{-1}\gamma^1_1\gamma^2(a^0_{21}-a^0_{12})\vec{C}+\omega^2(1-\gamma^1_1)^{-1}\gamma^1_1\gamma^1(a^0_{12}-a^0_{21})\vec{C}+\omega^3\Big[(\gamma^3_3-\gamma^1_1)\vec{A}_3+$$
$$+\frac{a^1_{31}(\gamma^3_3-\gamma^1_1)+\gamma^1(\gamma^1_1a^0_{13}-\gamma^3_3a^0_{31})}{1-\gamma^1_1}\vec{C}+\omega^4\Big[(\gamma^3_3-\gamma^1_1)\vec{A}_4+\frac{a^1_{41}(\gamma^3_3-\gamma^1_1)+\gamma^1(\gamma^1_1a^0_{14}-\gamma^3_3a^0_{41})}{1-\gamma^1_1}\vec{C}\Big].\qquad (4)$$

Дифференциал $d\vec{N}^3_3$ имеет вид,аналогичный виду дифференциала $d\vec{N}^1_1$.

Поставим перед собой вопрос:многообразия какой размерности описывают точки N^1_1 и N^3_3 и возможны ли случаи понижения этой размерности? Из формулы (4) следует,что $\dim(N^1_1)<4$,т.к. касательные к линиям ω^1, ω^2 совпадают.

I случай. Пусть $\dim(N^1_1)=3$. Нам надо найти такое семейство кривых Γ ,что при смещении точки A вдоль линии этого семейства,точка N^1_1 неподвижна.Зададим семейство кривых Γ следующей системой: Γ: $\omega^i=x^i\theta$, θ -параметрическая форма.Тогда $d\vec{A}=\omega^0_0\vec{A}+\theta(x^i\vec{A}_i)$.Точка N^1_1 будет неподвижна при смещении точки A вдоль линии семейства Γ , если $d\vec{N}^1_1=\varphi\vec{N}^1_1$. Последнее требование будет выполнено,если $x^1=\gamma^1$, $x^2=\gamma^2$, $x^3=x^4=0$, $a^0_{12}\neq a^0_{21}$, $\gamma^1\neq0$, $\gamma^2\neq0$.Обратное утверждение тоже справедливо.

Т е о р е м а 1. Размерность многообразия (N^1_1) равна трем тогда и только тогда,когда точки A_1, A_2 не сопряжены в нуль-полярной корреляции $\overset{0}{K}$ $(a^0_{12}\neq a^0_{21})$ и образ B точки A не принадлежит плоскости распределения $\overline{\Delta}_2(A)=(AA_3A_4)$.

При смещении точки A вдоль линии Γ: $x^1=\theta\gamma^1$, $x^2=\theta\gamma^2$, $x^3=0$, $x^4=0$ точка N^1_1 -неподвижна.Аналогичная теорема верна и для многообразия (N^3_3); для него линия $\widetilde{\Gamma}$ определяется следующим образом: $x^1=x^2=0$; $x^3=\gamma^3$; $x^4=\gamma^4$.

Напомним,что $\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3,\gamma^4$ -координаты точки C . Итак,многообразия (N^1_1), (N^3_3) в общем случае имеют размерность,равную трем единицам.

II случай.

Т е о р е м а 2. Размерность многообразия (N^1_1) $\{(N^3_3)\}$ равна двум тогда и только тогда,когда точки $A_1,A_2\{A_3,A_4\}$ сопряжены в нуль-