причем точка A_3 -сдвоенная фокальная точка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$1)\ \rho P_1 - \gamma_1^{21} P_2 - \gamma_1^{22} P_3 = 0, \quad 2)\ d[A_3 A_4] = 0. \qquad (6.11)$$

3) Фокальные точки коники C_4 определяются уравнением (6.10) и уравнением

$$x^1 x^2 (x^1 \gamma_1^{22} - x^2 \gamma_1^{21} - \rho x^3) = 0. \qquad (6.12)$$

Л и т е р а т у р а

1. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей. "Геометрия", 1963 (Итоги науки ВИНИТИ АН СССР), М., 1965, 5-64.
2. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия семейств линий и поверхностей. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. Алгебра. Топология. Геометрия, 10, М., 1972, 113-158.
3. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур. Тр. геом. семинара ВИНИТИ АН СССР. М., 1971, 3, 193-220.
4. Махоркин В.В., Некоторые типы многообразий гиперквадрик. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып. 3, Калининград, 1973, 50-59.
5. Фиников С.П., Асимптотически-сопряженные двойные линии Ермолаева. Уч. записки МГПИ, 16, вып. 3, 1951, 235-260.
6. Rimez D. Congruences de quadriques en P_3 et A_3. „Math. Nachr.", 1972, 53, №1-6, 345-359.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 4 1974

Н о в о ж и л о в а Т.П.

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ $(CL)_{1,2}$.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются вырожденные конгруэнции $(CL)_{1,2}$ пар фигур C и L, где C -эллипс, L -прямая, не инцидентная плоскости эллипса [1]. Исследованы торсовые конгруэнции $(CL)_{1,2}$. Выделены конгруэнции с осевой и центральной аффинной симметрией.

§1. Канонический репер конгруэнции $(CL)_{1,2}$.

Канонический репер $R = \{A, \bar e_1, \bar e_2, \bar e_3\}$ конгруэнции $(CL)_{1,2}$ строится следующим образом: начало A репера R помещается в точку пересечения прямой L с плоскостью соответствующего ей эллипса C, $\bar e_3 = \overline{AM}$, где M -центр эллипса, конец N вектора $\bar e_2$ выбирается так, что $\overline{AN} = \overline{MP}$, где $\overline{MP}$ -вектор, сопряженный вектору $\overline{AM}$, и точка P инцидентна эллипсу C, вектор $\bar e_1$ направляется по прямой L.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dA = \omega^i \bar e_i, \quad d\bar e_i = \omega_i^j \bar e_j, \quad (i,j,k = 1,2,3), \qquad (1)$$

причем формы Пфаффа удовлетворяют уравнениям структуры

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \qquad (2)$$

и условию эквиаффинности

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0. \qquad (3)$$

Пусть

$$\omega^1\wedge\omega^2\neq 0. \qquad (4)$$

Уравнения эллипса C и система дифференциальных уравнений конгруэнции $(CL)_{1,2}$ запишутся в виде:

$$b(x^3-1)^2+(x^2)^2-1=0,\ x^1=0.\ b>0; \qquad (5)$$

$$\begin{aligned}
&\omega_3^3=\alpha\omega^1-\omega^3, \quad \omega_3^1=n\omega^1, \quad \omega_1^3=\Gamma_{1\vartheta}^3\omega^\vartheta,\\
&\tfrac{1}{2}d\ln b=\rho\omega^1-\omega^3, \quad \omega_2^1=m\omega^1, \quad \omega_1^2=\Gamma_{1\vartheta}^2\omega^\vartheta,\\
&b\omega_2^3=l\omega^1+\omega^2, \quad \omega_2^2=\beta\omega^1, \quad \omega^3=\Gamma_\vartheta^3\omega^\vartheta,\\
&\omega_3^2=\gamma\omega^1-\omega^2, \quad (\vartheta=1,2).
\end{aligned} \qquad (6)$$

Исследуя систему уравнений (6), приходим к следующей теореме.

Т е о р е м а I. Конгруэнции $(CL)_{1,2}$ существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Т е о р е м а 2. В расширенном аффинном пространстве прямая AN или прямая AM параллельны характеристике плоскости эллипса в том и только в том случае, когда эта характеристика является несобственной прямой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характеристика плоскости эллипса параллельна прямой AN (AM) в том случае, когда $m=0$ $(n=0)$, но, в силу уравнений (6), из $m=0$ следует $n=0$ и наоборот. При этих условиях уравнения характеристики

$$1+mx^2+nx^3=0, \quad x^1=0 \qquad (7)$$

определяют несобственную прямую расширенного аффинного пространства.

О п р е д е л е н и е I. Конгруэнция $(CL)_{1,2}$, у которой касательная плоскость к поверхности (A) содержит точку A, называется конгруэнцией $(CL)_{1,2}^f$.

Аналитически конгруэнции $(CL)_{1,2}^f$ выделяются из конгруэнций $(CL)_{1,2}$ условием

$$\Gamma_2^3=0 \qquad (8)$$

и существуют с произволом двух функций двух аргументов.

Т е о р е м а 3. Для конгруэнции $(CL)_{1,2}^f$ справедливы следующие свойства: 1/ линейчатая поверхность $\omega^1=0$, описанная прямой L, пересекает плоскость эллипса C по эллипсу

$$f=b(x^3-1)^2+(x^2)^2-b=0. \qquad (9)$$

2/ координатная линия $\omega^1=0$ на поверхности, описанной точкой $\bar{K}=\bar{A}+\bar{e}_3$, является плоской линией.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точка A пересечения прямой L с плоскостью эллипса C принадлежит эллипсу (9). Используя деривационные формулы (I) и условие стационарности точки

$$dx^i=-x^j\omega_j^i-\omega^i, \qquad (10)$$

получим $(df)_{\omega^1=0}=0$. Следовательно эллипс, определяемый уравнением (9), инвариантен вдоль $\omega^1=0$

2/ из (I), (6) и (8) следует, что

$$(d\bar{K})_{\omega^1=0}=[(1+\Gamma_{12}^2)\bar{e}_2+\Gamma_{12}^3\bar{e}_3]\omega^2, \qquad (11)$$

$$(d\bar{e}_3)_{\omega^1=0} = -\bar{e}_2\omega^2,$$

$$(d\bar{e}_2)_{\omega^1=0} = \frac{1}{b}\bar{e}_3\omega^2,$$

т.е. для любого $n = 1,2,3...$

$$((d^n\bar{K})_{\omega^1=0},\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3) = 0.$$

Теорема доказана.

§ 2. Торсовые конгруэнции $(CL)_{1,2}$

Задание конгруэнции $(CL)_{1,2}$ определяет расслоение конгруэнции (L) на однопараметрическое семейство линейчатых поверхностей, которые характеризуются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\omega_3^3 = -\omega^3,\quad b\omega_2^3 = \omega^2,\quad \omega_3^1 = \omega_2^1 = \omega_1^2 = 0,\quad \omega_1^3 = \Gamma_{12}^3\omega^2,$$

$$\frac{1}{2}d\ln b = -\omega^3,\quad \omega_3^2 = -\omega^2,\quad \omega^3 = \Gamma_2^3\omega^2,\quad \omega_1^2 = \Gamma_{12}^2\omega^2. \qquad (12)$$

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнция $(CL)_{1,2}$ называется торсовой, если все поверхности (I2) - торсы.

О п р е д е л е н и е 3. Назовем параллелограмм с вершинами (I,I,0),(I,-I,0),(-I,-I,0),(-I,I,0) координатным параллелограммом плоскости $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$.

Рассмотрим торсовые конгруэнции $(CL)_{1,2}$, для которых

выполняются условия:

I/точка A является характеристической точкой плоскости эллипса C, 2/касательные к асимптотическим линиям поверхности (A) в точке A являются диагоналями координатного параллелограмма, 3/ прямая AM является аффинной нормалью поверхности (A) в точке A.

Такие конгруэнции назовем конгруэнциями $(CL)^{\circ}_{1,2}$. Аналитически условия (I-2) записываются в виде:

$$\Gamma_1^3 = \Gamma_2^3 = 0,\quad \Gamma_{12}^3 = \ell = 0,\quad \Gamma_{11}^3 = -\frac{1}{b}. \qquad (13)$$

Из соотношений (I3) следует:

$$b\omega_1^3 = -\omega^1,\quad b\omega_2^3 = \omega^2. \qquad (14)$$

Замыкая уравнения (I4) с учетом системы (6), получим:

$$\Gamma_{11}^2 = m,\quad \Gamma_{12}^2 = 2\rho - \alpha + 2\beta. \qquad (15)$$

Условие (3) приводится к виду:

$$\alpha = \rho \qquad (16)$$

Учитывая (I6), находим:

$$\gamma = 0,\quad n(\rho+2\beta)+2\beta = 0,\quad m[3\rho(n+1)+2\beta] = 0.$$

Приходим к двум возможным случаям:

$$n = m = \beta = 0,\quad \rho \neq 0; \qquad (17)$$

$$\rho = 0,\quad \beta = 0. \qquad (18)$$

О п р е д е л е н и е 4. Конгруэнции $(CL)^{\circ}_{1,2}$, для которых $b \neq const$ $(\rho \neq 0)$, назовем конгруэнциями с осевой аффинной симметрией. Конгруэнции $(CL)^{\circ}_{1,2}$, для которых $b = const$ $(\rho = 0)$, назовем конгруэнциями с центральной аффинной симметрией.

Торсовые конгруэнции с осевой симметрией определяются вполне интегрируемой системой дифференциальных уравнений:

$$\omega_3^3 = \rho\omega^1, \quad \frac{1}{2}d\ln b = \rho\omega^1, \quad b\omega_2^3 = \omega^2, \quad b\omega_1^3 = -\omega^1,$$

$$\omega_3^2 = -\omega^2, \quad \omega_3^1 = \omega_2^1 = \omega_2^2 = \omega^3 = 0, \tag{19}$$

$$\omega_1^2 = \rho\omega^2, \quad d\rho = \left(\frac{1}{b} - 2\rho^2\right)\omega^1$$

Рассмотрим прямую, проходящую через центр эллипса C и фокальную точку $A - \frac{1}{\rho}\bar{e}_1$ луча L прямолинейной конгруэнции (L).

Уравнения этой прямой имеют вид:

$$x^3 = \rho x^1 + 1, \quad x^2 = 0. \tag{20}$$

Исходя из (10) и (19), получаем $d(x^3 - \rho x^1 - 1) \equiv 0$, т.е. прямая (20) неподвижна. Назовем её осью аффинной симметрии конгруэнции, определяемой дифференциальными уравнениями (19).

Т е о р е м а 5. Конгруэнции $(CL)^{\circ}_{1,2}$ с осевой аффинной симметрией обладают следующими свойствами: 1/линия, описываемая центрами M эллипсов C, есть прямая (20), 2/плоскости эллипсов C составляют пучок параллельных плоскостей, 3/эллипсы C принадлежат цилиндру с образующей, параллельной оси симметрии (20), 4/линейчатая поверхность (12) есть конус с вершиной в точке $A - \frac{1}{\rho}\bar{e}_1$ и направляющей кривой (9), 5/плоскости $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$ образуют пучок плоскостей с осью $x^3 = \rho x^1 + 1$, $x^2 = 0$, 6/торсы прямолинейных конгруэнций (AM), (AN), (L) соответствуют, прямолинейные конгруэнции (AM) и (AN) являются цилиндрическими конгруэнциями, 7/координатные линии $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ на поверхности (A) являются плоскими линиями и располагаются соответственно в плоскостях $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ и $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$, 8/существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (L) к семейству плоскостей $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ и от прямолинейной конгруэнции (AM) к семейству плоскостей $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$, 9/линия $\omega^2 = 0$ является линией тени на поверхности (A).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойства (1-5) непосредственно вытекают из неподвижности прямой (20) и уравнений (19). Докажем свойства (6-8).

С в о й с т в о 6. Торсы прямолинейных конгруэнций (AM), (AN), (L) определяются уравнением

$$\omega^1\omega^2 = 0.$$

Имеем:

$$(d\bar{e}_2)_{\omega^2=0} = 0, \quad (d\bar{e}_3)_{\omega^2=0} = \rho\omega^1\bar{e}_3.$$

Свойство доказано.

С в о й с т в о 7. Так как

$$(d\bar{A})_{\omega^1=0} = \omega^2\bar{e}_2, \quad (d\bar{e}_2)_{\omega^1=0} = \frac{1}{b}\omega^2\bar{e}_3, \quad (d\bar{e}_3)_{\omega^1=0} = -\omega^2\bar{e}_2$$

и

$$(d\bar{A})_{\omega^2=0} = \omega^1\bar{e}_1, \quad (d\bar{e}_1)_{\omega^2=0} = \omega^1\left(-\rho\bar{e}_1 - \frac{1}{b}\bar{e}_3\right),$$

$$(d\bar{e}_3)_{\omega^2=0} = \rho\omega^1\bar{e}_3,$$

то для любого $n = 1, 2, 3 \ldots$

$$((d^n\bar{A})_{\omega^1=0}, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = 0, \quad ((d^n\bar{A})_{\omega^2=0}, \bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0,$$

т.е.координатные линии на поверхности (A) являются плоскими линиями.

С в о й с т в о 8. Условия аффинного расслоения от прямолинейной конгруэнции (L) к семейству плоскостей $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ и от прямолинейной конгруэнции (AM) к семейству плоскостей $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ записываются соответственно в виде:

$$\begin{cases} \omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 = 0, \\ \omega_1^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega^\gamma \wedge \omega_\gamma^3 = 0, \\ \omega_3^\gamma \wedge \omega_\gamma^3 = 0 \end{cases}$$

и, в силу (I9), тождественно удовлетворяются, что и доказывает свойство.

С в о й с т в о 9. Касательные плоскости к поверхности (A), взятые вдоль линии $\omega^2 = 0$, огибаются торсом с образующей AN, точка ребра возврата которого является несобственной точкой, т.е. линия $\omega^2 = 0$ есть линия тени на поверхности (A).

Центрально симметричные торсовые конгруэнции определяются системой дифференциальных уравнений:

$$\omega_1^3 + \omega^2 - \omega_2^2 = 0, \quad \frac{1}{2} d\ln b = 0, \quad b\omega_2^3 = \omega^2,$$

$$\omega_3^2 = -\omega^2, \quad \omega_3^1 = -\omega^1, \quad \omega_2^1 = m\omega^1, \quad b\omega_1^3 = -\omega^1, \qquad (21)$$

$$\omega_1^2 = m\omega^1$$

и существуют с произволом одной функции одного аргумента.

Центром симметрии конгруэнции, определяемой системой дифференциальных уравнений (2I), является неподвижная точка M.

Т е о р е м а 6. Конгруэнция $(CL)_{1,2}^{\circ}$ с центральной аффинной симметрией обладает следующими свойствами:
I/все эллипсы C принадлежат квадрике

$$F_1 = b(x^3 - 1)^2 + (x^2)^2 - (x^1)^2 - 1 = 0, \qquad (22)$$

поверхность (A) является квадрикой

$$F_2 = b(x^3 - 1)^2 + (x^2)^2 - (x^1)^2 - b = 0, \qquad (23)$$

2/линейчатая поверхность (I2) является цилиндрической поверхностью.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

С в о й с т в о I. Эллипс C принадлежит квадрике (22). Используя систему дифференциальных уравнений (2I) и условия (I0), получим $dF_1 = 0$. Следовательно, квадрика, определяемая уравнением (22), является инвариантной квадрикой. Аналогично доказывается второе утверждение свойства I.

С в о й с т в о 2. Из уравнений (2I) и (I) следует

$$(d\bar{e}_1)_{\omega^1=0} = 0;$$

т.е. линейчатая поверхность (I2) является цилиндрической поверхностью.

Л и т е р а т у р а.

I. Малаховский В.С., О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.3, 1973, 41-49.

2. Ткач Г.П., О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.3, 1973, 143-153.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.4 1974

Новожилова Т.П.

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ ПАР ФИГУР, ОБРАЗОВАННЫХ ПРЯМОЙ И ТОЧКОЙ.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются конгруэнции $(LP)_{2.1}$ [1]-вырожденные конгруэнции пар фигур, образованных прямой L и точкой P, не инцидентной этой прямой, когда (L) – прямолинейная конгруэнция, а (P) – линия. Исследованы расслояемые конгруэнции $(LP)_{2.1}$.

§1. Канонический репер конгруэнции $(LP)_{2.1}$.

Канонический репер $R = \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ конгруэнции $(LP)_{2.1}$ строится следующим образом: вершину A репера помещаем в центр луча L прямолинейной конгруэнции (L), конец N вектора $\bar{e}_3$ в один из фокусов этого луча, конец вектора $\bar{e}_1$ помещаем в точку P, соответствующую лучу L, вектор $\bar{e}_2$ направляем параллельно касательной L' к линии (P) в точке P. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j, \quad (i, j, \nu = 1, 2, 3), \qquad (1)$$

где формы Пфаффа ω^i, ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства: