УДК 514.76

К. В. Полякова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
polyakova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-9

О расширении касательного пространства 2-го порядка гладкого многообразия

С использованием возмущения внешнего и обычного дифференциалов введены отображения, позволяющие строить несимметричные кореперы и реперы 2-го и более высоких порядков на гладком многообразии. Произведено расширение касательного пространства 2-го порядка к гладкому m-мерному многообразию за счет дополнения касательных векторов 2-го порядка к этому многообразию вертикальными векторами к расслоению линейных реперов над этим многообразием.

Ключевые слова: гладкое многообразие, возмущение дифференциала, деформация дифференциала, касательное пространство 2-го порядка, реперы и кореперы 2-го порядка

Основываясь на применении внешнего и обычного дифференциалов D и d на гладком многообразии X_m, построим расширенный аппарат, позволяющий получить несимметричные формы дифференциальных групп 2-го и более высоких порядков, а также несимметричные векторы касательного пространства 2-го и более высоких порядков.

Поступила в редакцию 21.05.2022 г.

Рассмотрим над m-мерным гладким многообразием X_m главное расслоение касательных реперов $L(X_m)$ со структурными уравнениями [3]

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j,$$
$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \qquad (1)$$

$i, j, k = 1, \ldots, m$. Его типовым слоем является линейная группа $GL(m)$, действующая в касательном пространстве TX_m.

Формы инвариантного корепера $\{\omega^i, \omega^i_j, \omega^i_{jk}\}$ относительно натурального корепера $\{dx^i, dx^i_j, dx^i_{jk}\}$ выражаются по формулам [3]

$$\omega^i = x^i_j dx^j,$$
$$\omega^i_j = -\overset{*}{x}{}^k_j dx^i_k - x^i_{jk}\omega^k, \qquad (2)$$
$$\omega^i_{jk} = dx^i_{jk} + x^l_{jk}\omega^i_l - x^i_{lk}\omega^l_j - x^i_{jl}\omega^l_k + (x^s_{jk}x^i_{sl} - x^i_{jkl})\omega^l,$$

где x^i — локальные координаты точки на многообразии X_m. Слоевые координаты 1-го порядка x^i_j образуют невырожденную матрицу, для которой $\begin{pmatrix} \overset{*}{x}{}^i_j \end{pmatrix}$ — обратная матрица, то есть $\overset{*}{x}{}^i_j x^j_k = \delta^i_k$. Слоевые координаты 2-го и 3-го порядков x^i_{jk}, x^i_{jkl} симметричны по нижним индексам, в остальном слоевые координаты произвольны и рассматриваются как независимые переменные [3, с. 149].

Вполне интегрируемая система уравнений $\omega^i = 0$ фиксирует точку многообразия X_m, а значит, и слой расслоения $L(X_m)$. Следовательно, касательное пространство $TL(X_m)$

содержит вертикальное пространство $VL(X_m)=[e_i^j]$, касательное к слою в точке A. Вертикальные векторы имеют вид $e_j^i = -x_k^i \partial_j^k$ [14], $\partial_q^p = \partial / \partial x_p^q \in T^v L(X_m)$.

Каноническая форма 1-го порядка $\omega = \omega^i \varepsilon_i$ на многообразии X_m связывает касательное $TX_m = span(\varepsilon_i)$ и кокасательное $T^* X_m = span(\omega^i)$ пространства к этому многообразию в его текущей точке. Дифференциальные 1-формы ω^i образуют кобазис, сопряженный к подвижному базису $\{\varepsilon_i\}$, то есть $\omega^i(\varepsilon_j) = \delta_j^i$. Относительно натурального (голономного) репера $\left\{\partial_i = \partial / \partial x^i \,,\ \partial_{ij} = \partial^2 / \partial x^i \partial x^j \right\}$ векторы ε_i, ε_{ij} раскладываются по формулам [9; 14]:

$$\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}_i^j \partial_j \,,\ \varepsilon_{ij} = \overset{*}{x}{}_i^k \overset{*}{x}{}_j^l \partial_{kl} + x_{ij}^k \overset{*}{x}{}_k^l \partial_l \,. \tag{3}$$

Слоевые формы интерпретируются как компоненты инфинитезимального перемещения векторного репера ε_i, ε_{ij}, удовлетворяющего деривационным уравнениям [7]

$$d\varepsilon_i = \omega^j \varepsilon_{ij} + \omega_i^j \varepsilon_j \,,\ d\varepsilon_{ij} = \omega_i^k \varepsilon_{kj} + \omega_j^k \varepsilon_{ik} + \omega_{ij}^k \varepsilon_k + \omega^k \varepsilon_{ijk}, \tag{4}$$

которые получены дифференцированием векторов (3).

В силу (1) и (4) дифференциал канонической формы $\omega = \omega^i \varepsilon_i$ равен нулю.

Пространство $T^2 X_m = span(\varepsilon_i, \varepsilon_{ij})$ в текущей точке многообразия называется касательным пространством порядка 2, а также соприкасающимся пространством порядка 1 [8];

$$dim T^2 X_m = \tfrac{1}{2} m(m+3)\,.$$

Определим в пространствах $T^* X_m$ и TX_m деформацию дифференциалов D и d с помощью внешнего поля $f = f(x^i, x^\xi)$

и внутреннего поля $f^{\xi} = f^{\xi}(x^i)$, $\xi = \overline{m+1, m+s}$. Например, $f^{\xi} = f\big|_{x^{\xi}=1,\ остальные=0}$. В общем случае можно рассматривать $(x^{\xi}) = (x^i_j, x^i_{jk}, \ldots)$. В настоящей работе изучим случай, когда значения индекса ξ нумеруют элементы матрицы (x^i_j), то есть $(x^{\xi}) = (x^i_j)$, $f = f(x^k, x^i_j)$. Тогда $f^i_j = f\big|_{x^i_j=1,\ остальные=0}$, то есть в качестве функций f^i_j рассматриваются значения функций $f = f(x^i, x^i_j)$ на координатные линиях x^i_j.

1. Деформация внешнего дифференциала *D* в $T^* X_m$

Определение. Отображение Θ определяет *возмущение внешнего дифференциала D* на многообразии, если $D + \Theta$ снова является дифференциалом $(D + \Theta)^2 = 0$ (см., напр., [10, с. 8, 92].

Можно называть это возмущение *внутренним, или голономным*.

Определение. Отображение Θ определяет *внешнее возмущение внешнего дифференциала D* на многообразии, если $D + \Theta$ является дифференциалом вдоль линии ρ этого многообразия, то есть $(D + \Theta)^2\big|_{\rho} = 0$.

Можно называть это возмущение *неголономным*.

Для дифференциальной 1-формы ω имеем (см.: [6])

$$\breve{D}\omega = D\omega + (df \wedge \omega)\big|_{\wedge^2 T^*}, \qquad (5)$$

где $f = f(x^i, x^{\xi})$. Будем называть многообразие деформирующимся и обозначать $\breve{X}_m$, а отображение $\breve{D}$ — *внешним дифференциалом на* деформирующемся *многообразии* $\breve{X}_m$, или *внешней деформацией дифференциала D*.

Закон (5) для p-форм имеет вид

$$\breve{D}\overset{p}{\omega} = D\overset{p}{\omega} + p(df \wedge \overset{p}{\omega})\Big|_{\wedge^{p+1}T^*}, \quad f = f(x^i, x^\xi).$$

или коротко (см., напр., [1; 11])

$$\breve{D} = D + pdf \wedge \big|_{\wedge^{p+1}T^*}.$$

Замечание. В работе [1] рассматривается идея Э. Виттена [16] использовать функцию h, заданную на многообразии, для возмущения внешнего дифференциала d, то есть $d_t\omega = d\omega + tdh \wedge \omega$, где t — вещественный параметр. При этом $d_t^2 = 0$.

Замечание. Выражение, по форме аналогичное (1), встречается у [2, с. 174] в следующей теореме. Пусть Λ — тензорная p-форма типа ρ на главном расслоении $H = H(X_m, G_r)$ со значениями в векторном пространстве V_N. Тогда для внешнего абсолютного дифференциала D формы Λ относительно связности τ на главном расслоении H справедливо

$$D\Lambda = d\Lambda + \rho_*(\tau) \wedge \Lambda,$$

где ρ_*: $g \to gl(V)$ — гомоморфизм алгебр Ли, отвечающий представлению ρ.

Найдем деформацию внешнего дифференциала для ковекторов dx^i:

$$\breve{D}(dx^i) = D(dx^i) + df \wedge dx^i\Big|_{T^*} =$$

$$= \partial_j f\, dx^j \wedge dx^i = (\delta^i_{[k}\partial_{j]} f) dx^j \wedge dx^k.$$

Откуда

$$\breve{D}(dx^i) = \widetilde{N}^i_{jk} dx^j \wedge dx^k, \quad \widetilde{N}^i_{jk} = \delta^i_{[k}\partial_{j]} f.$$

Замечание. В работе [5, с. 42; 13] рассматривается внешний дифференциал на деформирующемся многообразии [5, с. 38, 86; 13] со свойством $d(dx^i \wedge dx^j \wedge \ldots) \neq 0$.

Для 1-формы $\omega = a_i dx^i$ справедливо равенство

$$\breve{D}\omega - D\omega = x_{ij} dx^i \wedge dx^j, \; x_{ij} = a_{[j}\partial_{i]} f \; .$$

Отображение $\Theta = p(df \wedge \overset{p}{\omega})\Big|_{\wedge^{p+1}T^*}$ определяет *внешнее возмущение внешнего дифференциала* D.

Теорема [6]. *Справедливы следующие свойства отображения* $\breve{D}$:

1⁰. *Аддитивность и градуированная кососкоммутативность:*

$$\breve{D}(\overset{p}{\omega} + \overset{p}{\theta}) = \breve{D}\overset{p}{\omega} + \breve{D}\overset{p}{\theta}, \; \breve{D}(\overset{p}{\omega} \wedge \overset{q}{\omega}) = (\breve{D}\overset{p}{\omega}) \wedge \overset{q}{\omega} + (-1)^p \overset{p}{\omega} \wedge \breve{D}\overset{q}{\omega}.$$

2⁰. *Обобщенный дифференциал функции* $g = g(x^i, x^\xi)$, *то есть 0-формы, совпадает с ее обычным дифференциалом* $\breve{D}g = dg$, *т.к. степень* $p = 0$.

3⁰. *Если* $\omega = dg$ — *полный дифференциал функции* $g = g(x^i, x^\xi)$, *то* $\breve{D}\omega = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}\dfrac{\partial g}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j$. *В частности,*

$$\breve{D}(df) = 0, \; \breve{D}(dx^\xi) = 0.$$

4⁰. *Если* $\omega = a_i(x^j, x^\xi) dx^i$, *то второй дифференциал дается формулой*

$$\breve{D}^2\omega = \omega_{ij} \wedge dx^i \wedge dx^j,$$

где

$$\omega_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x^{[j}}\frac{\partial a_{i]}}{\partial x^k} dx^k + d(\frac{\partial f}{\partial x^{[i}}) a_{j]}.$$

В частности, $\breve{D}^2(a_\xi dx^\xi) = 0$.

Для свойства 3^0 справедливы вычисления

$$\breve{D}\omega = \breve{D}(dg) = D(dg) + df \wedge dg\Big|_{\wedge^k T^*} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j ,$$

$$\breve{D}(df) = D(df) + \partial_j f dx^j \wedge df\Big|_{T^*} = 0 ,$$

$$\breve{D}(dx^\xi) = D(dx^\xi) + \partial_j f dx^j \wedge dx^\xi\Big|_{T^*} = 0 .$$

Для свойства 4^0 справедливы вычисления

$$\breve{D}^2\omega = \breve{D}\left(\breve{D}\omega\right) = \breve{D}\left(da_i \wedge dx^i + \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge \omega \right) =$$

$$= \breve{D}(da_i) \wedge dx^i - da_i \wedge \breve{D}(dx^i) + \breve{D}(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i) \wedge \omega - \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge \breve{D}\omega =$$

$$= \left(d(da_i) + \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge \frac{\partial a_i}{\partial x^k} dx^k \right) \wedge dx^i - da_i \wedge \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge \frac{\partial x^i}{\partial x^k} dx^k +$$

$$+ d(\frac{\partial f}{\partial x^i}) \wedge dx^i \wedge \omega + \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge \omega -$$

$$- \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge (da_j \wedge dx^j + \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge \omega) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial a_i}{\partial x^k} dx^k + d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) a_j \right) \wedge dx^i \wedge dx^j = \omega_{ij} \wedge dx^i \wedge dx^j ,$$

где $\omega_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x^{[j}}\frac{\partial a_{i]}}{\partial x^k} dx^k + d(\frac{\partial f}{\partial x^{[i}}) a_{j]}$ — кососимметричные 1-формы.

Замечание. В работах [12; 13; 15; 16] рассматривается деформация внешнего дифференциала, которая является дифференциалом при ограничении на некоторое подпространство.

2. Деформация дифференциала *d* в TX_m

Дифференциал касательных векторов $v = v^i \partial_i = v^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ в базисе $\{\partial_i\} = \{\partial / \partial x^i\}$ определяется по закону

$$d : v = v^i \partial_i \in TX_m \mapsto dv = dv^i \otimes \partial_i + v^i dx^j \otimes \partial_{ij} \in T^2 X_m \otimes T^* X_m .$$

Аналогично определяется дифференциал касательных векторов $v = v^i \varepsilon_i$ в базисе $\{\varepsilon_i\}$ [7; 14]:

$$d : \ v = v^i \varepsilon_i \in TX_m \ \mapsto \ dv = dv^i \otimes \varepsilon_i + v^i d\varepsilon_i .$$

При этом $D(dv) = 0$.

Определение. *Внешней деформацией дифференциала касательных векторов* $v = v^i \partial_i$ назовем оператор $\breve{d}$, определяемый по правилу

$$\breve{d} : \ v \in T\breve{X}_m \ \mapsto \ \breve{d}(v) = dv + d\big(v(f^i_j)\big)\partial^j_i\Big|_{T^*} \in T^2 \breve{X}_m , \ f^i_j = f^i_j(x^k) .$$

Будем считать, что

$$\breve{D}(v) = \breve{d}(v) = dv + d\big(v(f^i_j)\big)\partial^j_i\Big|_{T^*} , \ f^i_j = f^i_j(x^k) .$$

Будем говорить, что отображение θ определяет *внешнее возмущение дифференциала* d на многообразии, если $d + \theta$ является дифференциалом вдоль линии ρ этого многообразия, то есть $(D + \Theta)((d + \theta)^2 (v))\Big|_\rho = 0$, или формально $(d + \theta)^2\Big|_\rho = 0$.

Отображение $\theta(v) = d\big(v(f^i_j)\big)\partial^j_i\Big|_{T^*}$ определяет внешнее возмущение дифференциала *d*.

Замечание. Отображение $d\Big(v(f^i)\Big)\partial_i\Big|_{T^*}$ определяет внутреннее возмущение дифференциала d.

В частности, для касательных векторов $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ оператор $\breve{d}$ дает

$$\breve{d}(\partial_i) = d\partial_i + \Big(\partial_{ij} f_q^p \partial_p^q\Big) \otimes dx^j .$$

Таким образом,

$$\breve{d}(\partial_i) = (\partial_{ij} + N_{ijq}{}^p \partial_p^q) \otimes dx^j ,$$

где коэффициенты $N_{ijq}{}^p$ объекта $N_{ijq}{}^p dx^j \otimes \partial_p^q$ имеют вид

$$N_{ijq}{}^p = \partial_{ij} f_q{}^p .$$

Происходит расширение касательного пространства 2-го порядка $T^2 X_m$ с помощью вертикальных векторов

$$\partial_q^p = \partial / \partial x_p^q \in T^v L(X_m) .$$

3. Совпадение внешних дифференциалов форм вдоль линий

Дифференцируем формы (2_1) с помощью $\breve{D}$:

$$\breve{D}\omega^i = dx_j^i \wedge dx^j + \partial_j f dx^j \wedge \omega^i =$$

$$= (-x_j^l \omega_l^i - x_{ls}^i x_j^l \omega^s) \wedge \overset{*}{x}{}_k^j \omega^k + \partial_k f \overset{*}{x}{}_j^k \omega^j \wedge \omega^i =$$

$$= \omega^j \wedge \omega_j^i - x_{kl}^i \omega^k \wedge \omega^l + \partial_l f \overset{*}{x}{}_j^l \omega^j \wedge \delta_k^i \omega^k =$$

$$= \omega^j \wedge \left(\omega_j^i + \partial_l f \overset{*}{x}{}_{[j}^l \delta_{k]}^i \omega^k \right).$$

Откуда следует

$$\breve{D}\omega^i = \omega^j \wedge \breve{\omega}^i_j, \qquad (6)$$

$$\breve{\omega}^i_j = \omega^i_j + N^i_{jk}\omega^k \qquad (N^i_{jk} = \partial_l f \overset{*}{x}{}^l_{[j}\delta^i_{k]}). \qquad (7)$$

Учитывая (2_2), найдем

$$\breve{\omega}^i_j = -\overset{*}{x}{}^k_j dx^i_k - \breve{x}^i_{jk}\omega^k,$$

где $\breve{x}^i_{jk} = x^i_{jk} - N^i_{jk}$, причем $\breve{x}^i_{[jk]} = -N^i_{jk}$.

При фиксации точки многообразия структурные формы $\breve{\omega}^i_j, \omega^i_j$ группы $GL(m)$ совпадают, то есть справедливо равенство

$$\breve{\omega}^i_j\Big|_{\omega^k=0} = \omega^i_j\Big|_{\omega^k=0}.$$

Линия ρ на многообразии X_m задается уравнениями $\omega^i = \rho^i\omega$. Параметрическая форма ω удовлетворяет внешнему уравнению $D\omega = \omega \wedge \omega_1$, позволяющему найти дифференциальные уравнения на коэффициенты ρ^i:

$$\Delta\rho^i - \rho^i\omega_1 = \rho^i_1\omega,$$

где $\Delta\rho^i = d\rho^i + \rho^j\omega^i_j$.

Линия ρ на многообразии $\breve{X}_m$ задается уравнениями $\omega^i = \rho^i\omega$, причем $\breve{D}\omega = \omega \wedge \omega_1$ и

$$\breve{\Delta}\rho^i - \rho^i\omega_1 = \rho^i_1\omega,$$

где $\breve{\Delta}\rho^i = d\rho^i + \rho^j\breve{\omega}^i_j$.

Очевидно равенство $\breve{\Delta}\big|_{\omega^i=0} = \Delta\big|_{\omega^i=0}$ дифференциальных тензорных операторов $\breve{\Delta}$ и Δ при фиксации точки многообразия.

Утверждение. *Вдоль линии* ρ: $\omega^i = \rho^i \omega$ *дифференциалы* $\breve{D}$ *и* D *совпадают, то есть*

$$\breve{D}\omega^i \Big|_{\rho} = D\omega^i \Big|_{\rho},$$

поскольку $\breve{D}\omega^i - D\omega^i = N^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k$.

Замечание. Если $\omega^i = dx^i$, то есть $\overset{*}{x}{}^i_j = \delta^i_j$, то функции (ср. [4])

$$\breve{x}^i_{jk} = -\partial_l f \overset{*}{x}{}^l_{[j}\delta^i_{k]} + x^i_{jk}$$

остаются несимметричными.

4. Несимметричные векторы репера 2-го порядка

Применим $\breve{d}$ к касательным векторам $\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}^j_i \partial_j$ (3_1). Получим

$$\breve{\mathrm{d}}\varepsilon_i = \mathrm{d}\left(\overset{*}{\mathrm{x}}{}^{\mathrm{j}}_{\mathrm{i}}\partial_{\mathrm{j}}\right)\Big|_{\mathrm{T}^*} + \overset{*}{\mathrm{x}}{}^{\mathrm{j}}_{\mathrm{i}}\mathrm{N}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{jkq}}\partial^{\mathrm{q}}_{\mathrm{p}}\mathrm{dx}^{\mathrm{k}} =$$

$$= \breve{\omega}^{\mathrm{j}}_{\mathrm{i}}\varepsilon_{\mathrm{j}} + \mathrm{x}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ij}}\omega^{\mathrm{j}}\varepsilon_{\mathrm{k}} - \mathrm{N}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ij}}\omega^{\mathrm{j}}\varepsilon_{\mathrm{k}} + \overset{*}{\mathrm{x}}{}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{i}}\overset{*}{\mathrm{x}}{}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{j}}\partial_{\mathrm{lk}}\omega^{\mathrm{j}} + \overset{*}{\mathrm{x}}{}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{i}}\overset{*}{\mathrm{x}}{}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{j}}\mathrm{N}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{lkq}}\partial^{\mathrm{q}}_{\mathrm{p}}\omega^{\mathrm{j}}.$$

Тогда

$$\breve{d}\varepsilon_i = \breve{\omega}^j_i \varepsilon_j + \breve{\varepsilon}_{ij}\omega^j,$$

то есть $\breve{\Delta}\varepsilon_i = \breve{\varepsilon}_{ij}\omega^j$, где $\breve{\Delta}\varepsilon_i = \breve{\mathrm{d}}\varepsilon_i - \breve{\omega}^{\mathrm{j}}_{\mathrm{i}}\varepsilon_{\mathrm{j}}$.

Новые векторы 2-го порядка $\breve{\varepsilon}_{ij}$ имеют вид

$$\breve{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - N^k_{ij}\varepsilon_k + \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^{\,p}_{lkq}\partial^q_p = \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \partial_{lk} + \breve{x}^k_{ij}\varepsilon_k + \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^{\,p}_{lkq}\partial^q_p.$$

Симметричные векторы ε_{ij} (3_2) определяют касательное пространство 2-го порядка к многообразию X_m, то есть $T^2 X_m = span\left(\varepsilon_k, \varepsilon_{ij}\right)$. Новые векторы $\breve{\varepsilon}_{ij}$ несимметричны и

$$\breve{\varepsilon}_{[ij]} = N^k_{ij}\varepsilon_k .$$

Теорема. *Касательное пространство 2-го порядка* $T^2 \breve{X}_m = span\left(\varepsilon_k, \breve{\varepsilon}_{ij}\right) = span\left(\varepsilon_k, \varepsilon_{ij}, \partial^p_q\right)$ *деформирующегося многообразия* $\breve{X}_m$ *получается дополнением пространства* $T^2 X_m$ *векторами* $\partial^p_q = \partial / \partial x^q_p \in T^v L(X_m)$.

Замечание. Для построенных дифференциалов справедливо

$$\breve{D}\omega^i = D\omega^i + N^i_{jk}\omega^i \wedge \omega^j ,$$

$$\breve{d}\varepsilon_i = d\varepsilon_i + N_{ijq}{}^p \omega^j \otimes \partial^q_p .$$

Учитывая структурные уравнения (6), формула для внешнего дифференциала аналогична структурным уравнениям в работе [9].

5. Несимметричные формы корепера 2-го порядка

Продифференцируем выражения новых форм (7) с помощью дифференциала $\breve{D}$:

$$\breve{D}\breve{\omega}^i_j = \breve{\omega}^k_j \wedge \breve{\omega}^i_k + \omega^j \wedge \left(\omega^i_{jk} - \breve{\Delta} N^i_{jk} + \left(N^s_{j[k} N^i_{sl]} + \partial_s f \overset{*}{x}{}^s_{[l} x^i_{jk]} \right) \omega^l \right).$$

Здесь и в дальнейшем альтернирование производится по крайним индексам в квадратных скобках. Откуда

$$\breve{D}\breve{\omega}^i_j = \breve{\omega}^k_j \wedge \breve{\omega}^i_k + \omega^j \wedge \breve{\omega}^i_{jk} , \tag{8}$$

где

$$\breve{\omega}^i_{jk} = \omega^i_{jk} + \theta^i_{jk},$$

$$\theta^i_{jk} = -\breve{\Delta} N^i_{jk} + \left(N^s_{j[k} N^i_{sl]} + \partial_s f \overset{*}{x}{}^s_{[l} x^i_{jk]} \right) \omega^l .$$

При фиксации точки базы имеем

$$\breve{\pi}^i_{jk} = \breve{\omega}^i_{jk}\Big|_{\omega^l=0} = \omega^i_{jk}\Big|_{\omega^l=0} + \theta^i_{jk}\Big|_{\omega^l=0} = \pi^i_{jk} + \partial^q_{pl} f \overset{*}{x}{}^l_{[j} \delta^i_{k]} dx^p_q .$$

Видно, что структурные формы π^i_{jk}, $\breve{\pi}^i_{jk}$ дифференциальных групп 2-го порядка, действующих в касательных пространствах 2-го порядка

$$T^2 X_m = span(\varepsilon_k, \varepsilon_{ij})$$

и

$$T^2 \breve{X}_m = span(\varepsilon_k, \breve{\varepsilon}_{ij}) = span(\varepsilon_k, \varepsilon_{ij}, \partial^p_q),$$

не совпадают.

Замечание. В работе [4] рассматривается неголономная дифференциальная группа, определенная инвариантными формами, подчиненными лишь структурным уравнениям вида (6), (7) без дополнительных условий симметрии на эти формы.

Формулы (6), (8) аналогичны соответствующим формулам в работе [9].

Рассмотрим альтернирование форм $\breve{\omega}^i_{jk}$:

$$\breve{\omega}^i_{[jk]} = \omega^i_{[jk]} + \theta^i_{[jk]} = -\Delta N^i_{jk} + \left(N^s_{jk} N^i_{sl} - N^s_{[jl} N^i_{sk]} - \partial_s f \overset{*}{x}{}^s_{[k} x^i_{j]l} \right) \omega^l .$$

Поскольку $f = f(x^i, x^i_j)$, то

$$\breve{\Delta} N^i_{jk}\Big|_{\omega^l=0} = \overset{*}{x}{}^s_{[j} \delta^i_{k]} \frac{\partial^2 f}{\partial x^s_v \partial x^u} dx^u_v .$$

Значит, формы $\breve{\omega}^i_{jk}$ несимметричны даже в точке. Получили расслоение несимметричных кореперов на гладком многообразии $\breve{X}_m$. Отметим, что новые формы несимметричны даже при фиксации точки многообразия, то есть

$$\breve{\omega}^i_{[jk]} \not\equiv 0 \ (\bmod \omega^k).$$

Замечание. Если $f = f(x^i)$, то $\breve{\varDelta} N^i_{jk}\Big|_{\omega^l=0} = 0$. Тогда

$$\breve{\omega}^i_{[jk]}\Big|_{\omega^l=0} = 0,$$

то есть в точке формы $\breve{\omega}^i_{jk}$ симметричны. Получили расслоение симметричных кореперов.

Продифференцируем (6) с помощью $\breve{D}$:

$$\begin{aligned}\breve{D}^2\omega^i &= \breve{D}\left(\breve{D}\omega^i\right) = \breve{D}\omega^j \wedge \breve{\omega}^i_j - \omega^j \wedge \breve{D}\breve{\omega}^i_j = \\ &= \omega^k \wedge \breve{\omega}^j_k \wedge \breve{\omega}^i_j - \omega^j \wedge \left(\breve{\omega}^k_j \wedge \breve{\omega}^i_k + \omega^k \wedge \breve{\omega}^i_{jk}\right) = \\ &= -\omega^j \wedge \omega^k \wedge \breve{\omega}^i_{jk} = -\omega^j \wedge \omega^k \wedge \theta^i_{jk}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\breve{D}^2\omega^i = -\theta^i_{jk} \wedge \omega^j \wedge \omega^k,$$

что соответствует свойству 4^0. Причем

$$\theta^i_{[jk]} \not\equiv 0 \ (\bmod \omega^i).$$

Вдоль линии ρ: $\omega^i = \rho^i\omega$ получаем

$$\breve{D}^2\omega^i\Big|_\rho = 0.$$

Дифференцируем каноническую форму $\omega = \omega^i \varepsilon_i$ с помощью $\breve{D}$:

$$\breve{D}\omega = \breve{D}\omega^i \varepsilon_i - \omega^i \wedge \breve{d}\varepsilon_i =$$
$$= \omega^j \wedge \breve{\omega}^i_j \varepsilon_i - \omega^i \wedge (\breve{\omega}^j_i \varepsilon_j + \breve{\varepsilon}_{ij}\omega^j) = -\breve{\varepsilon}_{ij}\omega^i \wedge \omega^j =$$
$$= -\left(\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \partial_{lk} + x^k_{ij} e_k + N^k_{ij}\varepsilon_k + \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N_{lkq}{}^p \partial^q_p\right)\omega^i \wedge \omega^j.$$

Учитывая симметрию входящих функций и антисимметрию внешнего произведения, получим

$$\breve{D}\omega = -(N^k_{ij}\varepsilon_k + \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N_{lkq}{}^p \partial^q_p)\omega^i \wedge \omega^j,$$

то есть $\breve{D}\omega\big|_\rho = 0$.

Список литературы

1. *Аньар Г.* Неравенства Морса (по Виттену) / пер. с фр. И.С. Захаревича // Математический анализ и геометрия. Избр. тр. семин. Н. Бурбаки : сб. ст. 1983—1987 гг. М., 1990. Вып. 45. С. 80—101.
2. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения. М., 1975.
3. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1966. Т. 1. С. 139—189.
4. *Лумисте Ю.Г.* Связности в однородных расслоениях // Матем. сб. 1966. №69. С. 419—454.
5. *Петрова Л.И.* Кососимметричные дифференциальные формы: Законы сохранения. Основы теории поля. М., 2006.
6. *Полякова К.В.* Обобщение внешнего дифференциала с помощью виртуальной функции // ДГМФ. Калининград, 2010. Вып. 41. С. 111—117.
7. *Полякова К.В.* Тангенциальнозначные формы 2-го порядка // Матем. заметки. 2019. Т. 105, №1. С. 84—94.
8. *Рыбников А.К.* Об аффинных связностях второго порядка // Матем. заметки. 1981.Т. 29, №2. С. 279—290.
9. *Рыбников А.К.* Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Изв. вузов. Математика. 1983. №1. С. 73—80.

10. *Солодов Н.В.* Бивариантные когомологии с симметриями : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 2003.

11. *Ho F.-H.* Witten deformation and its application toward Morse inequalities. arXiv:1710.09579v1

12. *Petrova L.* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory Interpretation of the Einstein Equation // Axioms. 2021. Vol. 10, №46. doi: https://doi.org/10.3390/axioms10020046.

13. *Petrova L.I.* Skew-symmetric differential forms. Conservation laws: The foundation of equations of mathematical physics and field theory. M., 2021.

14. *Polyakova K.V.* Prolongations generated by horizontal vectors // J. Geom. 2019. Vol. 110, №53. doi: https://doi.org/10.1007/s00022-019-0510-2.

15. *Witten E.* Supersymmetry and Morse theory // J. Differential Geom. 1982. Vol. 17, №4. P. 661—692.

16. *Witten E.* A new look at the path integral of quantum mechanics. arXiv:1009.6032v1.

MSC 2010: 53B05, 53C05, 58A10

K. V. Polyakova
Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
polyakova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-53-9

On some extension of the second order tangent space for a smooth manifold

Submitted on May 21, 2022

This paper relates to differential geometry, and the research technique is based on G.F. Laptev's method of extensions and envelopments, which generalizes E. Cartan's method of moving frame and exterior forms. We consider a smooth m-dimensional manifold, its tangent and cotangent spaces, as well as the second-order frames and coframes on this manifold.

Using the perturbation of the exterior derivative and ordinary differential, mappings are introduced that enable us to construct non-symmetrical second-order frames and coframes on a smooth manifold. It is shown that the extension of the second order tangent space to a smooth *m*-dimensional manifold is carried out by adding the vertical vectors to the linear frame bundle over the manifold to the second order tangent vectors to this manifold.

A deformed external differential is widely used, which is a differential, i. e., its reapplication vanishes. We introduce a deformed external differential being a differential along the curves on the manifold, i. e., its repeated application along the curves on the manifold gives zero.

Keywords: smooth manifold, differential perturbation, deformation of differential, second order tangent space, second order frames and coframes

References

1. *Henniart, G.:* Les inégalités de Morse. Séminaire Bourbaki, exp. no 617, Astérisque, t. 121—122, 43—61 (1985).

2. *Sulanke, R., Wintgen, P.:* Differentialgeometrie und faserbundel. Basel (1972).

3. *Laptev, G.F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. Tr. Geom. Sem., 1, 139—189 (1966).

4. *Lumiste, Yu. G.:* Connections in homogeneous bundles. Sb. Math., 69, 419—454 (1966).

5. *Petrova, L.I.:* Skew-symmetric differential forms: Conservation laws. Fundamentals of field theory. Moscow (2006).

6. *Polyakova, K.:* Generalization of exterior differential by means of virtual function. DGMF. Kaliningrad. 41, 111—117 (2010).

7. *Polyakova, K. V.:* Second-Order Tangent-Valued Forms. Math. Notes, **105**:1, 71—79 (2019).

8. *Rybnikov, A.K.:* Affine connections of second order. Math. Notes, **29**:2, 143—149 (1981).

9. *Rybnikov, A.K.:* Second-order generalized affine connections. Izvestia Vuzov. Math., **27**:1, 84—93 (1983).

10. *Solodov, N. V.:* Bivariant cohomology with symmetries. PhD thesis. Moscow, 2003.

11. *Ho, F.-H.:* Witten Deformation and Its Application toward Morse Inequalities. arXiv:1710.09579v1.

12. *Petrova, L.:* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory Interpretation of the Einstein Equation. Axioms, **10**:46 (2021). https://doi.org/10.3390/axioms10020046.

13. *Petrova, L.I.:* Skew-symmetric differential forms. Conservation laws: The foundation of equations of mathematical physics and field theory. Moscow (2021).

14. *Polyakova, K. V.:* Prolongations generated by horizontal vectors. J. Geom., **110**:53 (2019). https://doi.org/10.1007/s00022-019-0510-2.

15. *Witten, E.:* Supersymmetry and Morse theory. J. Diff. Geom. **17**:4, 661—692 (1982).

16. *Witten, E.:* A new look at the path integral of quantum mechanics. arXiv:1009.6032v1.