M.V. Smolnikova

OWN DISTRIBUTION OF GEODESIC TENSOR FIELD

Let φ - symmetrical tensor field on a Riemannian manifold (M,g) and $V_{\lambda(x)}(x)\subset T_xM$ - own subspace of the applicable symmetrical operator Φ_x with an eigenvalue $\lambda(x)$ for any point $x\in M$. If M_φ - opened everywhere dense subset in M, consisting from points, in which one number of different eigenvalues of the operator Φ constantly, then on each linked component of set M_φ the eigenvalues of the operator Φ determine mutually different eigenfunctions and each such function $\lambda=\lambda(x)$ determines smooth distribution V_λ: $x\to V_{\lambda(x)}(x)$ of own subspaces of the operator Φ. If φ - Codazzi tensor, i.e. $(\nabla_X\varphi)(Y,Z)=(\nabla_Y\varphi)(X,Z)$ for all $X,Y,Z\in C^\infty TM$, then it is well-known result [1], according to which one own distribution V_λ is integrated with quite umbilical integral manifolds, and along every function $\lambda=\lambda(x)$ is constant. In the literature [2], [3] is studied the geodesic tensor field φ, for which one

$$(\nabla_X\varphi)(Y,Z)+(\nabla_Y\varphi)(Z,X)+(\nabla_Z\varphi)(X,Y)=\theta(X)\varphi(Y,Z)+\theta(Y)\varphi(Z,X)+\theta(Z)\varphi(X,Y)$$

for some $\theta\in C^\infty T^*M$. For $\theta\equiv 0$ field φ is called Killing field [4]. We will prove two theorems of own distribution for geodesic and, in particular, for Killing tensor field.

УДК 517.77

С.Е. Степанов

(*Владимирский государственный педагогический университет*)

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ ПРОСТРАНСТВ КОНФОРМНО-КИЛЛИНГОВЫХ ФОРМ

Доказывается, что на n-мерном римановом многообразии (M, g) пространства конформно-киллинговых p-форм и (n – p)-форм изоморфны.

§ 1. Основные определения и результаты

1.1. Рассмотрим расслоение Λ^pM дифференциальных p-форм над n-мерным римановым многообразием (M, g). Форма $\omega\in\Lambda^pM$ называется *гармонической*, если $\omega\in ker\,d\cap ker\,d^*$ для операторов внешнего дифференцирования $d:\Lambda^pM\to\Lambda^{p+1}M$, кодифференцирования $d^*=-*\circ d\circ *:\Lambda^pM\to\Lambda^{p-1}M$ и Ходжа $*:\Lambda^pM\to\Lambda^{n-p}M$.

Если обозначить через $\boldsymbol{H}^p(M,\mathbf{R})$ векторное пространство гармонических p-форм, а через $b_p = dim\,\boldsymbol{H}^p(M,\mathbf{R})$ – p-ое число Бетти, то имеют место изоморфизм $*: \boldsymbol{H}^{p}(M,\mathbf{R}) \to \boldsymbol{H}^{n-p}(M,\mathbf{R})$ и, как следствие его, равенство $b_p = b_{n-p}$, выражающие известную *двойственность Пуанкаре*. При этом (см. [1], стр. 55) на компактном ориентированном римановом многообразии (M, g) не существует ненулевых гармонических p-форм и, следовательно, $b_p = 0$ для $p = 1, \ldots, n-1$, если на (M, g) положительно определена квадратичная форма $F_p(\omega, \omega)$, чьи коэффициенты известным образом выражаются через компоненты тензоров кривизны и Риччи.

1.2. Зададим (см. [2]) на расслоении $\Lambda^p M$ оператор первого порядка $D = \nabla - (p+1)^{-1} d - (n-p+1)^{-1} g \,\square\, d^{*}$, где через ∇ нами обозначена связность Леви-Чивита на (M, g). Форма $\omega \in \Lambda^p M$ будет *конформно-киллинговой* (см. [2] и [3]), если $\omega \in \ker D$. Основным результатом настоящей работы является

Теорема. *Для векторных пространств* $\boldsymbol{T}^{p}(M,\mathbf{R})$ *и* $\boldsymbol{T}^{n-p}(M,\mathbf{R})$ *конформно-киллинговых форм имеет место изоморфизм* $*: \boldsymbol{T}^{p}(M,\mathbf{R}) \to \boldsymbol{T}^{n-p}(M,\mathbf{R})$ *и, как следствие этого, равенство* $t_p = t_{n-p}$ *их размерностей.*

Согласно утверждению Тачибаны (см. [2]) на компактном ориентированном римановом многообразия (M, g) с отрицательно определенной квадратичной формой $F_p(\omega, \omega)$ не существует отличных от нулевых конформно-киллинговых p-форм для $p = 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$. Принимая во внимание сформулированную выше теорему заключаем, что справедливо

Следствие. *На компактном ориентированном римановом многообразии (M, g) с отрицательно определенной квадратичной формой $F_p(\omega, \omega)$ не существует отличных от нулевых конформно-киллинговых p-форм, и, следовательно, $t_p = 0$ для $p = 1, \ldots, n-1$.*

§ 2. Доказательство теоремы

2.1. В координатной окрестности U на (M, g) с локальной системой координат $x^1, \ldots, x^n$ p-форма ω имеет следующий вид: $\omega = \frac{1}{p!}\omega_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$.

Пусть $\omega \in \boldsymbol{T}^{p}(M,\mathbf{R})$, тогда ее компоненты $\omega_{i_1 \ldots i_p}$ удовлетворяют уравнениям (см. [3])

$$\nabla_k \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \nabla_{[k}\omega_{i_1 i_2 \ldots i_p]} + \frac{p}{n-p+1} g_{k[i_1} \nabla^m \omega_{|m| i_2 \ldots i_p]} \,. \tag{1}$$

Зададим на (M, g) локальную ориентацию и в координатной окрестности U с локальной системе координат $x^1, \ldots, x^n$, согласованной с введенной ориентацией, рассмотрим n-форму объема $\eta = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ многообразия

$(M,\ g)$. Обозначим через $\eta_{i_1..i_n}$ ее компоненты и определим $(n-p)$-форму $*\omega$ равенствами

$$(*\omega)_{i_{p+1}..i_n} = \frac{1}{p!}\eta^{i_1..i_p}{}_{i_{p+1}..i_n}\omega_{i_1..i_p}. \tag{2}$$

Докажем, что $(n-p)$-форма $*\omega$ является конформно-киллинговой, то есть

$$\nabla_k(*\omega)_{i_{p+1}..i_n} = \frac{1}{p+1}\{g\square d^*(*\omega)\}_{ki_{p+1}..i_n} + \frac{1}{n-p+1}\{d(*\omega)\}_{ki_{p+1}..i_n}. \tag{3}$$

Для этого продифференцируем ковариантным образом левую и правую части равенства (2), а затем воспользуемся уравнением (1), получим

$$\nabla_k(*\omega)_{i_{p+1}..i_n} = \frac{1}{p!}\eta^{i_1..i_p}{}_{i_{p+1}..i_n}\nabla_{[k}\omega_{i_1..i_p]} +$$
$$+\frac{1}{(p-1)!(n-p+1)}\eta^{i_1i_2..i_p}{}_{i_{p+1}..i_n}g_{k[i_1}\nabla^m\omega_{|m|i_2..i_p]} \tag{4}$$

Рассмотрим отдельно первое и второе слагаемые в правой части равенства (4).

2.2. Первое слагаемое из правой части равенства (4) есть тензор T с компонентами $T_{ki_{p+1}..i_n}$ из пространства $T^*M\otimes\Lambda^{n-p}M$. Известно следующее (см. [3] и [4], стр. 264) неприводимое относительно действия ортогональной группы $O(n)$ разложение этого пространства:

$$T^*M\otimes\Lambda^{n-p}M = \Lambda^{n-p+1}M\oplus\mathbf{R}g\square\Lambda^{n-p-1}M\oplus\left(ker\,\Lambda^{n-p+1}\cap ker\ tr_{12}\right),$$

где $\Lambda^{n-p+1}: T^*M\otimes\Lambda^{n-p}M\to\Lambda^{n-p+1}M$ и $tr_{12}: T^*M\otimes\Lambda^{n-p}M\to\Lambda^{n-p-1}M$ суть операторы альтернации и свертки. На этом основании тензор T должен раскладываться в сумму из трех $O(n)$-неприводимых компонент. Непосредственная проверка показывает, что первая и третья компоненты этой суммы равны нулю, а потому

$$T_{ki_{p+1}..i_n} = \frac{n-p}{p+1}g_{k[i_{p+1}}(tr_{12}T)_{i_{p+2}..i_n]},$$

где

$$(tr_{12}T)_{i_{p+2}..i_n} = g^{ki_{p+1}}\left\{\frac{1}{p!}\eta^{i_1..i_p}{}_{i_{p+1}i_{p+2}..i_n}\nabla_{[k}\omega_{i_1..i_p]}\right\} =$$
$$=\frac{1}{(p+1)!}g^{ki_{p+1}}\eta^{i_1..i_p}{}_{i_{p+1}i_{p+2}..i_n}\left\{\nabla_k\omega_{i_1..i_p}-\nabla_{i_1}\omega_{k..i_p}-\ \dots\ -\nabla_{i_p}\omega_{i_1..k}\right\} =$$
$$=\nabla^{i_{p+1}}\left\{\frac{1}{p!}\eta^{i_1..i_p}{}_{i_{p+1}i_{p+2}..i_n}\omega_{i_1..i_p}\right\} = -\left\{d^*(*\omega)\right\}_{i_{p+2}..i_n}.$$

Подводя промежуточный итог заключаем, что

$$\frac{1}{p!}\eta^{i_1..i_p}{}_{i_{p+1}..i_n}\nabla_{[k}\omega_{i_1..i_p]}=\frac{1}{p+1}\{g\square d^*(*\omega)\}_{ki_{p+1}..i_n}. \tag{5}$$

2.3. Рассмотрим теперь второе слагаемое в правой части равенства (4). Полагая $\theta_{i_2..i_p}=\nabla^m\omega_{mi_2..i_n}$ будем иметь

$$\frac{1}{p!(n-p+1)}g_{km}\left\{\eta^{i_1i_2..i_p}{}_{i_{p+1}..i_n}\left(\delta^m_{i_1}\theta_{i_2..i_p}-\delta^m_{i_2}\theta_{i_1..i_p}-\ \dots\ -\delta^m_{i_p}\theta_{i_2..i_p}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{p!(n-p+1)}g_{km}\times$$

$$\times\left\{\eta^{mi_2...i_p}{}_{i_{p+1}..i_n}\theta_{i_2...i_p}-\eta^{i_1m...i_p}{}_{i_{p+1}...i_n}\theta_{i_1...i_p}-\ \dots\ -\eta^{i_1i_2...m}{}_{i_{p+1}...i_n}\theta_{i_2...i_1}\right\}=$$

$$=\frac{1}{(p-1)!(n-p+1)}g_{km}\eta^{mi_2..i_p}{}_{i_{p+1}..i_n}\theta_{i_2..i_p}=$$

$$=\frac{1}{(p-1)!(n-p+1)}\nabla^m\left(\eta^{i_1..i_{p-1}}{}_{mi_{p+1}..i_n}\omega_{i_1...i_{p-1}m}\right)=$$

$$=\frac{1}{(p-1)!(n-p)!(n-p+1)}\nabla_m\left\{\eta^{i_1..i_{p-1}}{}_{ki_{p+1}..i_n}\eta_{i_1..i_{p-1}}{}^{mk_{p+1}..k_n}(*\omega)_{k_{p+1}..k_n}\right\}=$$

$$=\frac{1}{(n-p)!(n-p+1)}\nabla_m\left\{\delta^m_{[k}\delta^{k_{p+1}}_{i_{p+1}}..\delta^{k_n}_{i_n]}(*\omega)_{k_{p+1}..k_n}\right\}=\frac{1}{n-p+1}\nabla_{[k}(*\omega)_{i_{p+1}..i_n]}=$$

$$=\frac{1}{n-p+1}\{d(*\omega)\}_{ki_{p+1}..i_n},$$

Здесь мы воспользовались равенством:

$$\omega_{i_1..i_{p-1}m}=\frac{1}{(n-p)!}\eta_{i_1..i_{p-1}m}{}^{k_{p+1}..k_n}(*\omega)_{k_{p+1}..k_n}.$$

Подводя окончательный итог, можем выписать уравнение (3), которое свидетельствует о том, что $(n-p)$-форма $(*\omega)$ – конформно-киллингова. В завершении доказательства теоремы напомним: оператор Ходжа $*:\Lambda^pM\to\Lambda^{n-p}M$ линеен относительно умножения на функции.

Библиографический список

1. *Бохнер С., Яно К.* Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, 1957.
2. *Stepanov S.E.* A class of closed forms and special Maxwell's equations // Tensor. N.S., 1997. Vol. 58. P. 245-255.
3. *Tachibana S.* On conformal Killing tensor in Riemannian space // Tohoku Math. J. 1969. Vol. 21. P.56-64.
4. *Бессе А.* Четырехмерная риманова геометрия. М.: Мир, 1985.

S.E. Stepanov

ON ISOMORPHISM OF THE SPACES OF CONFORMAL KILLING FORMS

In the present paper is demonstrated, that the space $\boldsymbol{T}^{p}(M,\mathbf{R})$ of conformal Killing p-forms and the space $\boldsymbol{T}^{n-p}(M,\mathbf{R})$ of conformal Killing $(n-p)$-forms are isomorphic on an n-dimensional Riemannian manifold (M, g).