УДК 514.76

А. В. Кулешов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
arturkuleshov@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-7

О структурных формах проективной структуры

Показано, что проективная структура на гладком многообразии порождает дифференциально-геометрические структуры 2-го, 3-го и т. д. порядков над расслоением фактор-реперов данного гладкого многообразия. Построены структурные формы и выведены структурные уравнения данной структуры.

Ключевые слова: гладкое многообразие, фактор-репер, расслоение реперов, проективная структура, дифференциально-геометрическая структура, структурные формы, структурные уравнения

Введение

Изучение проективных структур было начато еще в работах Дж. Уайтхеда [5] и Ш. Эресмана [6] 30-х гг. прошлого века. Однако до сих пор «при $n \geq 3$ проблема существования и классификации проективных структур на n-мерном многообразии чрезвычайно далека от решения» [3, с. 169]. Полный ответ на задачу классификации известен только в размерностях 1 и 2 (см., напр., [7]). Пример гладкого многообразия размерности 3, не допускающего проективной структуры, приведен в [8].

Существует ряд эквивалентных определений проективной структуры, связывающих это понятие с проективными атласами, развертывающими отображениями, тензорными плотностями (см., напр., [9]). Проективную структуру можно также понимать как плоскую проективную связность [3, с. 242].

Поступила в редакцию 22.05.2022 г.

Целью данной статьи является интерпретация проективной структуры на гладком многообразии M в терминах расслоений реперов высшего порядка $H^p(M)$ на M и их структурных форм. Она достигается путем построения дифференциально-геометрических структур, порождаемых данной проективной структурой. Данное построение осуществлено в несколько этапов.

Этап 1. Для произвольного многообразия M конструируется так называемое расслоение фактор-реперов $P(M)$, ассоциированное с $H^2(M)$.

Этап 2. При помощи заданной на M проективной структуры строятся отображения из $P(M)$ в $H^p(M)$, $p \geq 2$.

Этап 3. При помощи кодифференциалов отображений, построенных на этапе 2, структурные формы расслоений $H^p(M)$ «переносятся» на $P(M)$.

Структура настоящей работы следующая. В части 1 приводятся необходимые сведения о расслоениях реперов высших порядков и структурных формах (см., напр., [1]). Этапы 1—3 реализованы в частях 2—4 соответственно. Основные результаты работы сформулированы в виде теорем 1 и 2.

На протяжении всей работы индексы принимают следующие значения:

$$i, j, k, l, m, ... = \overline{1, n}.$$

1. Расслоения реперов высших порядков

Пусть M — n-мерное гладкое многообразие, $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ — атлас на M, $x \in M$ — некоторая точка, (U, φ) — некоторая карта атласа в окрестности данной точки. Репер порядка p (p-репер) r_x^p на многообразии M в точке x — это p-струя $j_0^p f$ диффеоморфизма $f : (R^n, 0) \to (M, x)$ окрестностей точек $0 \in R^n$ и $x \in M$ такого, что $f(0) = x$. Локальными координатами этого p-репера в карте (U,φ) считаются значения в точке $0 \in R^n$ частных производных функций f^i, задающих координатное представление $\varphi \circ f$ отображения f относительно данной карты:

$$(x^i, x^i_j, x^i_{jk}, \dots, x^i_{j_1 j_2 \dots j_p}),$$

где

$$x^i = f^i(0), \; x^i_{j_1 j_2 \dots j_s} = \partial_{j_1 j_2 \dots j_s} f^i(0), \; s = 1, \dots, p,$$

а в роли аргументов выступают стандартные координаты $(t^1, t^2, \dots, t^n)$ на R^n. Заметим, что матрица (x^i_j) обратима.

Через D^p_n обозначим дифференциальную группу порядка p, где $p = 1, 2, \dots$. Множество $H^p(M)$ всех p-реперов многообразия M наделено структурой главного расслоения с базой M, структурной группой D^p_n и канонической проекцией

$$\pi^p : H^p(M) \to M, \quad \pi^p(r^p_x) = x.$$

Так как каждый p-репер определяет последовательность реперов всех низших порядков, то для любых $p < q$ определен гомоморфизм главных расслоений $\pi^q_p : H^q(M) \to H^p(M)$.

На расслоении $H^3(M)$ глобально определены дифференциальные 1-формы ω^i, ω^i_j, ω^i_{jk}, локальное координатное выражение которых вытекает из формул

$$dx^i = x^i_j \omega^i,$$

$$dx^i_j = x^i_k \omega^k_j + x^i_{jk} \omega^k, \tag{1.1}$$

$$dx^i_{jk} = x^i_l \omega^l_{jk} + x^i_{jl} \omega^l_k + x^i_{kl} \omega^l_j + x^i_{jkl} \omega^l$$

и имеет вид

$$\omega^i = \tilde{x}^i_j dx^j \,,$$

$$\omega^i_j = \tilde{x}^i_k (dx^k_j - x^k_{jl}\omega^l) \,, \qquad (1.2)$$

$$\omega^i_{jk} = \tilde{x}^i_l (dx^l_{jk} - x^l_{jm}\omega^m_k - x^l_{km}\omega^m_j - x^l_{jkm}\omega^m) \,,$$

где $\tilde{x}^i_j$ — элементы матрицы, обратной матрице (x^i_j):

$$\tilde{x}^i_k x^k_j = \delta^i_j \,.$$

Внешние дифференциалы 1-форм ω^i, ω^i_j можно представить в виде

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j \,, \; d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk} \,. \qquad (1.3)$$

2. Расслоение фактор-реперов

Определение 1. Пусть r^2_x и $\hat{r}^2_x$ — два репера порядка 2 в точке $x \in M$. Назовем их *эквивалентными*, если относительно некоторой (а значит, любой) карты на M в окрестности точки x их координаты (x^i, x^i_j, x^i_{jk}) и (y^i, y^i_j, y^i_{jk}) соответственно связаны соотношениями

$$x^i = y^i \,, \; x^i_j = y^i_j \,, \; x^j_{ik}\tilde{x}^k_j = y^j_{ik}\tilde{y}^k_j \,.$$

Фактор-репер на M в точке x (*центропроективный репер* в терминологии статьи [2]) — это класс эквивалентности $[r^2_x]$ 2-реперов по данному отношению, где r^2_x — 2-репер, представляющий данный класс.

Координатами фактор-репера $[r_x^2]$ относительно карты (U,φ) являются величины (x^i, x^i_j, x_i), где $x_i = x^j_{ik}\widetilde{x}^k_j$. Если при этом отображение f таково, что $j_0^2 f = [r_x^2]$, то

$$x_i = \left.\frac{\partial \ln |J_f|}{\partial t^i}\right|_{t=0},$$

где J_f — якобиан отображения f относительно данной карты:

$$J_f = \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial t^j}\right).$$

Обозначим через PD_n^1 проективно-дифференциальную группу первого порядка.

Теорема 1. *Множество $P(M)$ всех фактор-реперов многообразия M наделяется структурой главного расслоения с базой M, структурной группой PD_n^1 и канонической проекцией $\overline{\pi}: P(M) \to M$, действующей по правилу $\overline{\pi}([r_x^2]) = x$. Расслоение $P(M)$ присоединено к главному расслоению $H^2(M)$ с гомоморфизмом-охватом*

$$\Phi: H^2(M) \to P(M), \quad \Phi(r_x^2) = [r_x^2].$$

Доказательство см. в статье [2].

Дифференциалы dx_i можно разложить по формам ω^i, ω^i_j, ω_i следующим образом [2]:

$$dx_i = \omega_i + x_j\omega^j_i + x_{ij}\omega^j, \tag{2.1}$$

где

$$x_{ij} = x^l_{ijk}\widetilde{x}^k_l - \widetilde{x}^k_l x^l_{im}\widetilde{x}^m_q x^q_{jk}, \tag{2.2}$$

$$\omega_i = \omega^k_{ik}.$$

3. Проективная структура на многообразии

Определение 2. Атлас $A=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ на гладком многообразии M называется *проективным атласом*, если все отображения перехода $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ дробно-линейны. *Два проективных атласа* называются *эквивалентными*, если их объединение — снова проективный атлас. Класс эквивалентности проективных атласов называется *проективной структурой* Π [3].

Определение 3. Пусть даны два расслоения: $\widetilde{F}(M)$ и $F(M)$, ассоциированные с расслоением p-реперов $H^p(M)$, причем расслоение $\widetilde{F}(M)$ охватывает расслоение $F(M)$: $\varphi:\widetilde{F}(M)\to F(M)$. *Дифференциально-геометрической структурой порядка p на* $F(M)$ называется сечение [1]

$$\sigma: F(M)\to\widetilde{F}(M),\quad \varphi\circ\sigma=id_{F(M)}.$$

Вначале покажем, как с помощью проективной структуры выделить по одному каноническому представителю для каждого фактор-репера на M. Для этого среди всевозможных локальных диффеоморфизмов $f:(R^n,0)\to(M,x)$ выделим такие, которые хотя бы в одной (а следовательно, в каждой) карте проективной структуры Π задаются дробно-линейными функциями, отличными от констант:

$$x^i=f^i(t^j)=\frac{a^i_j t^j+a^i_0}{a^0_j t^j+a^0_0},\quad \det(a^i_j)\neq 0. \tag{3.1}$$

Класс всех таких отображений обозначим через $\Im(M)$.

Лемма 1. *В любой карте проективной структуры* Π *справедливы следующие выражения для частных производных 2-го порядка отображения (3.1) класса* $\Im(M)$:

$$\frac{\partial^2 x^l}{\partial t^i \partial t^j} = \frac{1}{n+1}(A_i^l A_j + A_j^l A_i), \qquad (3.2)$$

где

$$A_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial t^j}, \quad A_i = \frac{\partial^2 x^m}{\partial t^i \partial t^k} \frac{\partial t^k}{\partial x^m}.$$

Доказательство. Пусть $f \in \Im(M)$, то есть отображение f задано функциями вида (3.1). Формулу (3.1) перепишем в виде тождества относительно переменных t^j:

$$(a_k^0 t^k + a_0^0) x^l = a_k^l t^k + a_0^l.$$

Последовательно дифференцируя это тождество сначала по t^i, затем по t^j, получим:

$$(a_k^0 t^k + a_0^0)\frac{\partial x^l}{\partial t^i} + a_i^0 x^l = a_i^l,$$

$$(a_k^0 t^k + a_0^0)\frac{\partial^2 x^l}{\partial t^i \partial t^j} + a_i^0 \frac{\partial x^l}{\partial t^j} + a_j^0 \frac{\partial x^l}{\partial t^i} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 x^l}{\partial t^i \partial t^j} = -\frac{1}{a_k^0 t^k + a_0^0}\left(a_i^0 \frac{\partial x^l}{\partial t^j} + a_j^0 \frac{\partial x^l}{\partial t^i} \right). \qquad (3.3)$$

Пусть

$$A_i = \frac{\partial x^m}{\partial t^i \partial t^k} \frac{\partial t^k}{\partial x^m}.$$

Тогда в силу (3.3)

$$A_i = \frac{\partial^2 x^m}{\partial t^i \partial t^k} \frac{\partial t^k}{\partial x^m} = -\frac{(n+1)a_i^0}{a_k^0 t^k + a_0^0}. \qquad (3.4)$$

С учетом данного равенства формула (3.3) дает (3.2). Лемма доказана.

Замечание 1. Из (3.4) получается выражение для частной производной A_i по t^j:

$$\frac{\partial A_i}{\partial t^j} = \frac{A_i A_j}{n+1}.$$

Замечание 2. Формула (3.2) обобщается на частные производные любого порядка $p \geq 2$:

$$\frac{\partial^p x^l}{\partial t^{i_1} \partial t^{i_2} \ldots \partial t^{i_p}} = \frac{p!}{(n+1)^{p-1}} A^l_{(i_1} A_{i_2} \ldots \ A_{i_p)}. \tag{3.5}$$

Замечание 3. Из леммы 1 непосредственно следует, что для отображений класса $\Im(M)$ многомерная производная Шварца [3] обращается в нуль.

Замечание 4. В случае $n = 1$ равенства (3.2) обращаются в тождество для произвольного отображения, а потому они сами по себе не накладывают никаких ограничений. При этом равенства (3.5) при $p = 3$ принимают вид

$$f'''(t) = \frac{3}{2} \frac{(f''(t))^2}{f'(t)},$$

что равносильно обращению в нуль производной Шварца [3].

Замечание 5. Формула (3.1), рассматриваемая как система дифференциальных уравнений на неизвестные функции $x^i(t^j)$ при $n \geq 2$, допускает непосредственное интегрирование (см., напр., [4]), и ее решение имеет вид (3.1). Таким образом, при $n \geq 2$ она является не только необходимым, но также и достаточным условием принадлежности отображения f классу $\Im(M)$.

Лемма 2. *Для любого фактор-репера ξ_x многообразия M существует единственное (с точностью до выбора окрест-*

ности точки x*) отображение* f *класса* $\Im(M)$ *такое, что данный фактор-репер является классом эквивалентности в точке* x *2-репера данного отображения:*

$$\xi_x = [j_0^2 f], \quad f \in \Im(M).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное отображение $f \in \Im(M)$ такое, что $f(0) = x$. В любой карте проективной структуры Π в окрестности точки x отображение f задается функциями f^i вида (3.1). При этом $a_0^0 \neq 0$, поскольку f определено в точке $0 \in R^n$. Разложим функции f^i по формуле Маклорена 2-го порядка:

$$f^i = c^i + \sigma_j^i t^j + \frac{1}{2}\sigma_{jk}^i t^j t^k + o(\rho^2), \tag{3.6}$$

где

$$\sigma_j^i = c_j^i - c^i c_j, \quad \sigma_{jk}^i = -2\sigma_j^i c_k,$$

$$c_j^i = \frac{a_j^i}{a_0^0}, \quad c^i = \frac{a_0^i}{a_0^0}, \quad c_j = \frac{a_j^0}{a_0^0}, \quad \rho = ((t^1)^2 + \ldots + (t^n))^{1/2}.$$

С другой стороны,

$$f^i = x^i + x_j^i t^j + \frac{1}{2} x_{jk}^i t^j t^k + o(\rho^2), \tag{3.7}$$

где (x^i, x_j^i, x_{jk}^i) — координаты 2-струи $j_0^2 f$.

Сопоставляя (3.6) и (3.7), видим, что отображение f порождает заданный фактор-репер $\xi_x = [j_0^2 f]$ тогда и только тогда, когда справедливы равенства

$$c^i = x^i, \quad \sigma_j^i = x_j^i, \quad \sigma_{(ij)}^k \tilde{\sigma}_k^j = x_i,$$

которые равносильны следующей системе уравнений относительно неизвестных c_j^i, c^i, c_j:

$$c^i = x^i, \quad c^i_j - c^i c_j = x^i_j, \quad -(x^j_i c_k + x^j_k c_i)\widetilde{x}^k_j = x_i,$$

имеющей единственное решение

$$c^i = x^i, \quad c_i = -\frac{1}{n+1} x_i, \quad c^i_j = x^i_j - \frac{1}{n+1} x^i x_j.$$

Лемма доказана.

Замечание 6. Из леммы 2 следует, что для каждой точки $x \in M$ фактор-реперы на M в этой точке находятся во взаимно-однозначном соответствии с ростками отображений класса $\Im(M)$ в данной точке, причем данное соответствие не зависит от выбора локальных координат.

Замечание 7. В частном случае, когда многообразие M представляет собой проективное пространство P^n, а проективная структура на нем задана аффинными картами, фактор-реперы на M можно отождествить с обычными проективными реперами, и таким образом понятие фактор-репера приобретает наглядный геометрический смысл [11].

Теорема 2. *Проективная структура* Π *на гладком многообразии определяет семейство отображений*

$$\sigma^p : P(M) \to H^p(M), \quad p \geq 2,$$

являющихся дифференциально-геометрическими структурами порядка p *над расслоением фактор-реперов* $P(M)$. *Действие каждого из отображений* σ^p *относительно любой локальной карты на* M, *принадлежащей проективной структуре* Π, *имеет вид*

$$(x^i, x^i_j, x_i) \to (x^i, x^i_j, \bar{x}^i_{jk}, \ldots, \bar{x}^i_{j_1 j_2 \ldots j_p}),$$

где

$$\bar{x}^i_{j_1 j_2 \ldots j_p} = \frac{p!}{(n+1)^{p-1}} x^i_{(j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_p)}, \quad p = 2, 3, \ldots. \tag{3.8}$$

Доказательство. По лемме 2, для каждого фактор-репера ξ_x существует единственное (с точностью до выбора окрестности точки x) отображение f класса $\Im(M)$ такое, что $\xi_x = [j_0^2 f]$. Отображение f, в свою очередь, определяет для каждого $p \geq 2$ p-репер $r_x^p = j_0^p f$ в точке x. Тем самым построено семейство отображений $\sigma^p : P(M) \to H^p(M)$, $\sigma^p(\xi_x) = r_x^p$, действие которых относительно любой локальной карты на M, принадлежащей проективной структуре Π, имеет вид (3.8), вытекающий из формулы (3.5). Теорема доказана.

Замечание 8. Из (2.2) и (3.8) вытекает, что

$$\bar{x}_{ij} = \frac{x_i x_j}{n+1}. \tag{3.9}$$

4. Структурные формы проективной структуры

Рассмотрим 1-формы ω^i, ω^i_j, ω^i_{jk}, ω_i, определенные на $H^3(M)$, а также их образы под действием кодифференциала отображения σ^3:

$$\overline{\omega}^i = \sigma^{3*}(\omega^i),\ \overline{\omega}^i_j = \sigma^{3*}(\omega^i_j),\ \overline{\omega}^i_{jk} = \sigma^{3*}(\omega^i_{jk}),\ \overline{\omega}_i = \sigma^{3*}(\omega_i).$$

1-формы $\overline{\omega}^i$, $\overline{\omega}^i_j$, $\overline{\omega}_i$, определенные на $P(M)$, будем называть структурными формами проективной структуры Π. Выражения для форм $\overline{\omega}^i$, $\overline{\omega}^i_j$ легко получаются из выражений для форм ω^i, ω^i_j:

$$\overline{\omega}^i = \tilde{x}^i_j dx^j,\ \overline{\omega}^i_j = \tilde{x}^i_k (dx^k_j - \bar{x}^k_{jl}\omega^l).$$

Лемма 3. *Выражения для форм* $\overline{\omega}^i_{jk}$ *имеют вид*

$$\overline{\omega}^i_{jk} = \frac{1}{n+1}(\delta^i_j \overline{\omega}_k + \delta^i_k \overline{\omega}_j). \tag{4.1}$$

Доказательство. Выведем выражение для дифференциала $d\overline{x}^i_{jk}$ через формы $\overline{\omega}^i$, $\overline{\omega}^i_j$, $\overline{\omega}_i$. Используя формулы (3.8) при $p=2$, (1.1) и (2.1), получим

$$d\overline{x}^i_{jk}=\frac{1}{n+1}d(x^i_j x_k)+\{j\leftrightarrow k\}=$$

$$=\frac{1}{n+1}(x_k(\underline{x^i_m\overline{\omega}^m_j}+\overline{x}^i_{jm}\overline{\omega}^m)+x^i_j(\overline{\omega}_k+\underline{x_m\overline{\omega}^m_k}+\overline{x}_{km}\overline{\omega}^m))+\{j\leftrightarrow k\},$$

где символ $\{j\leftrightarrow k\}$ обозначает выражение, полученное перестановкой индексов j и k. Отдельно рассмотрим подчеркнутые слагаемые. Заметим, что

$$x^i_m x_k\overline{\omega}^m_j+x^i_j x_m\overline{\omega}^m_k+\{j\leftrightarrow k\}=x^i_m x_k\overline{\omega}^m_j+x^i_k x_m\overline{\omega}^m_j+\{j\leftrightarrow k\}=$$

$$=(x^i_m x_k+x^i_k x_m)\overline{\omega}^m_j+\{j\leftrightarrow k\}=(n+1)\overline{x}^i_{km}\overline{\omega}^m_j.$$

Также отдельно рассмотрим слагаемые, содержащие формы $\overline{\omega}^m$. В силу (3.8) и (3.9) получим

$$x_k\overline{x}^i_{jm}\overline{\omega}^m+x^i_j\overline{x}_{km}\overline{\omega}^m+\{j\leftrightarrow k\}=$$

$$=\frac{1}{n+1}(x_k(x^i_j x_m+x^i_m x_j)+x^i_j x_k x_m)\overline{\omega}^m+\{j\leftrightarrow k\}=(n+1)\overline{x}^i_{jkm}\overline{\omega}^m.$$

Таким образом,

$$d\overline{x}^i_{jk}=\frac{1}{n+1}x^i_m(\delta^m_j\overline{\omega}_k+\delta^m_k\overline{\omega}_j)+\overline{x}^i_{km}\overline{\omega}^m_j+\overline{x}^i_{jm}\overline{\omega}^m_k+\overline{x}^i_{jkm}\overline{\omega}^m.$$

Сравнивая полученное выражение с (1.1), приходим к (4.1). Лемма доказана.

Теорема 3. *Внешние дифференциалы структурных форм проективной структуры* Π *удовлетворяют уравнениям*

$$d\overline{\omega}^i=\overline{\omega}^j\wedge\overline{\omega}^i_j, \tag{4.2}$$

$$d\overline{\omega}_j^i = \overline{\omega}_j^k \wedge \overline{\omega}_k^i + \frac{1}{n+1}\overline{\omega}^k \wedge (\delta_j^i \overline{\omega}_k + \delta_k^i \overline{\omega}_j), \tag{4.3}$$

$$d\overline{\omega}_i = \overline{\omega}_i^j \wedge \overline{\omega}_j. \tag{4.4}$$

Доказательство. Формула (4.2) получается непосредственно из (1.3). Формула (4.3) выводится из (1.3) в силу леммы 3. Выведем формулу (4.5). Для этого применим к обеим частям равенства (2.1) кодифференциал отображения σ^3:

$$dx_i = \overline{\omega}_i + x_j \overline{\omega}_i^j + \overline{x}_{ij}\overline{\omega}^j,$$

а затем возьмем внешний дифференциал от обеих частей:

$$0 = d\overline{\omega}_i + dx_j \wedge \overline{\omega}_i^j + x_j d\overline{\omega}_i^j + d\overline{x}_{ij} \wedge \overline{\omega}^j + \overline{x}_{ij} d\overline{\omega}^j. \tag{4.5}$$

Отдельно рассмотрим сумму второго и третьего слагаемых. В силу (4.3) и (2.1) получим

$$dx_j \wedge \overline{\omega}_i^j + x_j d\overline{\omega}_i^j = (\overline{\omega}_j + \underline{x_k \overline{\omega}_j^k} + \overline{x}_{jk}\overline{\omega}^k) \wedge \overline{\omega}_i^j +$$

$$+ x_j(\underline{\overline{\omega}_i^k \wedge \overline{\omega}_k^j} + \frac{1}{n+1}\overline{\omega}^k \wedge (\delta_i^j \overline{\omega}_k + \delta_k^j \overline{\omega}_i)),$$

где подчеркнутые члены взаимно уничтожаются. Также отдельно рассмотрим сумму четвертого и пятого слагаемых, которая с учетом (3.9) и (2.1) приводится к виду

$$d\overline{x}_{ij} \wedge \overline{\omega}^j + \overline{x}_{ij} d\overline{\omega}^j = \frac{1}{n+1}((x_j dx_i + x_i dx_j) \wedge \overline{\omega}^j + x_i x_j \overline{\omega}^k \wedge \overline{\omega}_k^j) =$$

$$= \frac{1}{n+1}(x_j(\overline{\omega}_i + x_k \overline{\omega}_i^k + \underline{\overline{x}_{ik}\overline{\omega}^k}) \wedge \overline{\omega}^j +$$

$$+ x_i(\overline{\omega}_j + \underline{x_k \overline{\omega}_j^k} + \underline{\overline{x}_{jk}\overline{\omega}^k}) \wedge \overline{\omega}^j + \underline{x_i x_j \overline{\omega}^k \wedge \overline{\omega}_k^j},$$

где сумма подчеркнутых членов равна нулю. Таким образом, равенство (4.5) принимает вид

$$0 = d\overline{\omega}_i + \frac{1}{n+1}\overline{\omega}^k \wedge (x_i\overline{\omega}_k + x_k\overline{\omega}_i) + \overline{\omega}_j \wedge \overline{\omega}_i^j + \overline{x}_{jk}\overline{\omega}^k \wedge \overline{\omega}_i^j +$$

$$+\frac{1}{n+1}(x_j\overline{\omega}_i \wedge \overline{\omega}^j + x_j x_k \overline{\omega}_i^k \wedge \overline{\omega}^j + x_i\overline{\omega}_j \wedge \overline{\omega}^j),$$

откуда после приведения подобных слагаемых получается (4.4). Теорема доказана.

Замечание 9. Из теоремы 2 ввиду теоремы Фробениуса вытекает, что система уравнений

$$\overline{\omega}_i^j = 0, \quad \overline{\omega}_i = 0;$$

задает вполне интегрируемое распределение D на расслоении $P(M)$. Следовательно, над любой связной односвязной областью $U \subset M$ результат параллельного перенесения фактор-репера не зависит от выбора пути на базе M, вдоль которого оно осуществляется, а зависит лишь от его начала и конца.

Замечание 10. Если произвести замену $\overline{\omega}^i = \vartheta^i$, $\overline{\omega}_j^i = \vartheta_j^i$, $\overline{\omega}_i = -(n+1)\vartheta_i$, то с чисто формальной точки зрения уравнения (4.2)—(4.4) примут тот же самый вид, что и структурные уравнения группы проективных преобразований n-мерного проективного пространства (см., например, [10]). Однако, в отличие от последнего, на многообразии M действие указанной группы a priori не задано.

Список литературы

1. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

2. *Кулешов А.В.* Центропроективные реперы как классы эквивалентности реперов второго порядка // ДГМФ. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 94—107.

3. *Овсиенко В.Ю., Табачников С.Л.* Проективная дифференциальная геометрия. Старое и новое: от производной Шварца до когомологий групп диффеоморфизмов. М., 2008.

4. *Eisenhart L.P.* Non-Riemannian Geometry. N.Y., 1927.
5. *Whitehead J.M.C.* Locally homogeneous spaces in differential geometry // Ann. Math. 1932. Vol. 33, №4. P. 681—687.
6. *Ehresmann, C.* Sur les espaces localement homogènes. L'Enseign // Math. 1936. Vol. 35. P. 317—333.
7. *Choi C., Goldman W.* The classification of real projective structures on compact surfaces // Bull. Am. Math. Soc., 1997. Vol. 34. P. 161—171.
8. *Cooper D., Goldman W.* A 3-Manifold with no Real projective structure. http://arxiv.org/abs/1207.2007.
9. *Овсиенко В.Ю.* Проективные структуры и контактные формы // Функциональный анализ и его приложения. 1994. Т. 28, №3. С. 187—197.
10. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.
11. *Кулешов А.В.* Об эквивалентности двух точек зрения на центропроективные реперы // ДГМФ. Калининград, 2017. Вып. 48. С. 60—65.

MSC 2010: 53B10, 53C10

A. V. Kuleshov
Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
arturkuleshov@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-53-7

On the structure forms of a projective structure

Submitted on May 22, 2022

A projective structure on a smooth manifold is a maximal atlas such that all its transition maps are the fractional linear transformations. Our aim is to interpret this notion in terms of the higher order frame bundles and their structure forms. It is shown that the projective structure generates the sequence of differential geometric structures. The construction is following:

Step 1. For a smooth manifold the so-called quotient frame bundle associated to the 2nd order frame bundle on the manifold is constructed.

Step 2. Given projective structure on the manifold, the mappings from the quotient frame bundle to the higher order frame bundles are constructed. These mappings are the differential geometric structures.

Step 3. The pullbacks of the structure forms of the frame bundles via the mappings are considered. These are called structure forms of the projective structure. The expressions of their exterior differentials in terms of the forms themselves are found. These expressions coincide with the structure equations of a projective space.

Keywords: smooth manifold, quotient frame, frame bundle, projective structure, differential geometric structure, structure forms, structure equations

References

1. *Evtushik, L.E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.:* Differential-geometric structures on manifolds. J. Soviet Math., **14**:6, 1573—1719 (1980).

2. *Kuleshov, A. V.:* Center-projective frames as equivalence classes of the second order frames. DGMF. Kaliningrad. 46, 94—107 (2015).

3. *Ovsienko, V., Tabachnikov S.:* Projective differential geometry. Old and new. Cambridge (2005).

4. *Eisenhart, L.P.*: Non-Riemannian Geometry. New York (1927).

5. *Whitehead, J.M.C.:* Locally homogeneous spaces in differential geometry. Ann. Math. **33**:4, 681—687 (1932).

6. *Ehresmann, C.:* Sur les espaces localement homogènes. L'Enseign. Math. 35, 317—333 (1936).

7. *Choi, C., Goldman, W.:* The classification of real projective structures on compact surfaces. Bull. Am. Math. Soc. 34, 161—171 (1997).

8. *Cooper, D., Goldman, W.:* A 3-Manifold with no Real projective structure. http://arxiv.org/abs/1207.2007.

9. *Ovsienko, V. Yu.:* Projective structure and contact forms. Funct. anal. and its app., **28**:3, 187—197 (1994).

10. *Kobayashi, S.:* Transformation groups in differential geometry. Moscow (1986).

11. *Kuleshov, A. V.:* On the equivalence of two viewpoints on the center-projective frames. DGMF. Kaliningrad. 48, 60—65 (2017).