**Следствие**. *На n-мерном многообразии M с эквипроективной структурой* $(\nabla, \eta)$ *существуют по меньшей мере n!/p!(n-p)! линейно независимых аффинно-киллинговых p-форм .*

*Библиографический список*

1. Цыганок И.И. Аффинный аналог метода Яно-Бохнера // Тезисы докл. конф. “Проблемы теоретической и прикладной математики“. Тарту: Изд-во Тартуского ун-та, 1990. С.76-78.

2. Степанов С.Е., Цыганок И.И. Техника Бохнера в аффинной дифференциальной геометрии // Алгебраические методы в геометрии. М.: Изд-во Российского ун-та дружбы народов, 1992 . С. 50- 5 .

3. Stepanov S.E., Tsyganok I.I. Vector fields in manifold with equiaffine connection // Webs and Qusigroups, Tver: Tver State University, 1993. P. 70-77.

4. Nomizu K. What is affine differential geometry? // Proc. Conf. on Diff. Geom. Munster, 1982. P. 42-43.

5 . Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, 1957. 152с.

6. Yano K. On the torse-forming direction in a Riemannian space // Proc. Imp. Acad. 1944. V. 20. P.340-345.

I. I. T s y g a n o k , S. E. S t e p a n o v

## HODRE'S OPERATOR ON THE MANIFOLD WITH THE EQUIAFFINE STRUCTURE

The authors considere an n-dimensional manifold M with the equiaffine structure $(\nabla, \eta)$. It is proved that (n-1)-form, dual to the special concircular vector field with respect to a n-form of the valume $\eta$ , is an affine-killing.

УДК 514.75

# К ГЕОМЕТРИИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ ПАРЫ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

М.А. Ч е ш к о в а

*( Алтайский государственный университет )*

В евклидовом пространстве $E^{n+1}$ рассматриваются две гладкие гиперповерхности $M, \overline{M}$ и диффеоморфизм $f: M \to \overline{M}$. Исследуется случай, когда $f$ центральная проекция.

**1**. Пусть $M$, $\overline{M}$ - гладкие гиперповерхности в $E^{n+1}$, $F(M)$ - R-алгебра дифференцируемых на $M$ функций, $T_q^s(M)$ - F-модуль дифференцируемых на $M$ тензорных полей типа $(s,q)$, $\partial$ - дифференцирование в $E^{n+1}$.

Формулы Гаусса - Вейнгартена [1] поверхности $M$ запишутся в виде

$$\partial_X Y = \nabla_X Y + b(X,Y)n \ , \ \partial_X n = -AX \ , \tag{1}$$

где $X, Y \in T_0^1(M)$ , $b \in T_2^0(M)$ - второй фундаментальный тензор гиперповерхности $M$, $A \in T_1^1(M)$ - оператор Вейнгартена , $\nabla$ - связность Леви- Чивита метрики $g(X,Y) = \langle X, Y \rangle$, где $X, Y \in T_0^1(M)$, $\langle , \rangle$ - скалярное произведение в $E^{n+1}$, $n$ - поле единичных векторов нормали гиперповерхности $M$.

**2**. Обозначим через $r(p)$ - радиус-вектор точки $p \in M$, а через $\bar{r}(p)$ радиус-вектор точки $f(p) \in \overline{M}$. Тогда отображение $f: M \to \overline{M}$ можно записать в виде

$$\bar{r} = r + a \ (a \neq \vec{0}). \tag{2}$$

Через $\underline{df}X_p$ обозначим вектор, полученный путем параллельного переноса вектора $dfX_p \in T_{f(p)}\overline{M}$ в точку $p \in M$ относительно связности $\partial$. Тогда дифференцируя (2) , получим

$$\underline{df}X = \partial_X \bar{r} = \partial_X r + \partial_X a = X + \partial_X a \, .$$

Пусть $a = U + ln$, где $U \in T_0^1(M)$ , $l \in F(M)$. В силу (1) имеем

$$\underline{df}X = FX + \omega(X)n \ , \tag{3}$$

где

$$FX = X + \nabla_X U - lAX \ , \ \omega(X) = Xl + b(X,U). \tag{4}$$

Рассмотрим квадратичную форму $\bar{g}(X,Y) = \langle \underline{df}X, \underline{df}Y \rangle$, индуцируемую на $M$ первой фундаментальной формой $\langle dfX, dfY \rangle$ гиперповерхности $\overline{M}$. Связность Леви - Чивита связности $\overline{\nabla}$ метрики $\bar{g}$ определится из условия [2], что

$$\partial_X \underline{df}Y - \underline{df}\overline{\nabla}_X Y \in T^{\perp}M \, .$$

Если $\bar{n}(p)$ орт нормали гиперповерхности $\overline{M}$ в точке $f(p)$, то имеем

$$\partial_X \underline{df}Y - \underline{df}\overline{\nabla}_X Y = \bar{b}(X,Y)\underline{\bar{n}} \ ,$$
$$b \in T_2^0(M) \ , \ n = V + hn \ , \ V \in T_0^1(M) \ , \ h \in F(M) \, . \tag{5}$$

Пусть $f{:}M \to \overline{M}$ центральная проекция. Тогда существует неподвижная точка $G = r + ta$ . Имеем

$$\partial_X G = \partial_X r + (Xt)a + t(\partial_X \bar{r} - \partial_X r) = X + (Xt)a + t(\underline{df}X - X) = 0 \; .$$

Откуда

$$\underline{df}X = kX - (X\ln t)a \; , \;\; k = 1 - \frac{1}{t} \; , \qquad (6)$$

$$FX = kX - (X\ln t)U \; , \;\; \omega(X) = \text{-}l(X\ln t) \; .$$

В этом случае

$$\bar{g}(X,Y) = k^2 g(X,Y) + (X\ln t)((Y\ln t)\rho - kg(Y,U) + (Y\ln t)((X\ln t)\rho - kg(X,U)) \quad (7)$$

где

$$2\rho = \langle a,a \rangle = \langle U,U \rangle + l^2 \; .$$

Отображение $f{:}M \to \overline{M}$ называется [3] соответствием Петерсона, если касательные гиперплоскости в соответствующих точках параллельны. Тогда из (3) получим $\omega = 0$, а из (6) $l(X\ln t) = 0$. Если $l = 0$, то $a = U \in T_0^1(M)$ и $M$ есть гиперконус с образующими прямыми $L=(C,U)$ (без вершины). А так как $\underline{df}U = (k - \ln t)U$, то $L \in \overline{M}$ и $f$ есть отображение конуса вдоль образующей. Если $l \neq 0$ и $f{:}M \to \overline{M}$ есть соответствие Петерсона, то $X\ln t=0$, $t=\text{const}$, $k=\text{const}$, $\bar{g}(X,Y) = k^2 g(X,Y)$ и $f{:}M \to \overline{M}$ гомотетия.

Если $\omega \neq 0$, то дифференциальное уравнение $\omega(X) = 0$, $X \in T_0^1(M)$ определяет на $M$ (n-1)-распределение $\Delta$. Для $X,Y \in \Delta$ имеем $\underline{df}X = kX$, $Xk = 0$, $\bar{g}(X,Y) = k^2 g(X,Y)$, т.е. ограничение $f$ на интегральное многообразие распределения $\Delta$ (оно в инволюции в силу (6)) есть гомотетия .

**Теорема 1**. *Если центральная проекция* $f{:}M \to \overline{M}$ *не есть соответствие Петерсона и* $n>2$ *, то следующие утверждения эквивалентны :*

*1)* $f{:}M \to \overline{M}$ - *конформное отображение ,*

*2)* $(X\ln t)\rho - kg(X,U) = 0$ .

**Доказательство**. $f{:}M \to \overline{M}$ конформное отображение тогда и только тогда, когда

$$\Psi(X,Y) = (X\ln t)((Y\ln t)\rho - kg(Y,U)) + (Y\ln t)((X\ln t)\rho - kg(X,U)) = \varphi^2 g(X,Y) \; ,$$

$\varphi \in F(M)$. Но так как $\operatorname{rang}\Psi = 2$, то при $n>2$, $X\ln t \neq 0$, получим $(X\ln t)\rho - kg(X,U) = 0$, $U \neq \overset{1}{0}$.

**Следствие 1**. *Если* $n>2$ *и центральная проекция* $f$ *есть конформное отображение , не являющееся соответствием Петерсона , то векторы* $U$ , $V$ *в соответствующих точках параллельны .*

**Доказательство**. Имеем

$$\langle \underline{df}X, \bar{n} \rangle = \langle kX - (X\ln t)a, \bar{n} \rangle = 0,$$

или

$$kg(X,V) - (X\ln t)\langle a, \bar{n} \rangle = 0.$$

Обозначим $\langle a, \bar{n} \rangle = m$ . Тогда

$$kg(X,V) - m(X\ln t) = 0.$$

С другой стороны, в силу теоремы 1 имеем

$$kg(X,U) - \rho(X\ln t) = 0,\ k\rho \neq 0.$$

Откуда

$$V - \frac{m}{\rho}U = 0. \tag{8}$$

Замечаем, что в рассматриваемом случае $\frac{m^2}{\rho^2}(2\rho - l^2) + h^2 = 1$.

**Следствие 2**. *Если* $n>2$ *и центральная проекция* $f$ *есть конформное отображение, не являющееся соответствием Петерсона, то распределение* $\Delta$ *ортогонально полю* $U$.

**Доказательство**. Имеем

$$\omega(X) = -l(X\ln t) = \frac{lk}{\rho}g(X,U).$$

Так как $lk \neq 0$, то $g(X,U) = 0,\ X \in \Delta$.

**Следствие 3**. *Если* $n>2$ *и центральная проекция* $f$ *есть конформное отображение, не являющееся соответствием Петерсона , то вектор*

$$W = \frac{k-1}{\rho}U \tag{9}$$

*есть градиент функции* $\ln k$.

**Доказательство**. Имеем

$$X(\ln k) = \frac{1-k}{k}\ln t = \frac{k-1}{\rho}g(X,U) = g(X, \frac{k-1}{\rho}U)\ .$$

Определим связность $\bar{\nabla}$ Леви - Чивита метрики $\bar{g}$ . Из (5), (6) имеем

$$\partial_X(kY - (Y\ln t)a) - k\bar{\nabla}_X Y + ((\bar{\nabla}_X Y)\ln t)a = \bar{b}(X,Y)\bar{n} = \bar{b}(X,Y)(V + hn),$$

или

$$(Xk)Y + k\nabla_X Y + kb(X,Y)n - (XY\ln t)a - (Y\ln t)(\underline{df}X - X) -$$
$$- k\overline{\nabla}_X Y + ((\overline{\nabla}_X Y)\ln t)(U + ln) = b(X,Y)(V + hn) \ .$$

Приравнивая нулю касательные и нормальные составляющие, получим

$$k(\nabla_X Y - \overline{\nabla}_X Y) + (Xk)Y - (\mathrm{Hess}^{\overline{\nabla}}_{XY}\ln t)U - (Y\ln t)((k-1)X -$$
$$-(X\ln t)U) = \overline{b}(X,Y)V \ ,$$

$$-(\mathrm{Hess}^{\overline{\nabla}}_{XY}\ln t)l + (Y\ln t)(X\ln t)l + kb(X,Y) = \overline{b}(X,Y)h\,,$$

где

$$\mathrm{Hess}^{\overline{\nabla}}_{XY}\ln t = XY\ln t - (\overline{\nabla}_X Y)\ln t\,.$$

гессиан функции $\ln t$ в связности $\overline{\nabla}$. Так как $Xk = (1-k)X\ln t$, то имеет место

**Теорема 2**. *Если* $\underline{f}$ *есть центральная проекция и* $n>2$*, то связность* $\overline{\nabla}$ *Леви - Чивита метрики* $\overline{g}$ *имеет вид*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (X\ln k)Y + (Y\ln k)X + \frac{1}{kl}(\overline{b}(X,Y)h - b(X,Y)k)U - \frac{1}{k}\overline{b}(X,Y)V\,.$$

**Теорема 3**. *Если* $n>2$ *и центральная проекция* $f$ *есть конформное преобразование, не являющееся соответствием Петерсона, то*

$$\overline{b}(X,Y)(\frac{h}{l} - \frac{m}{\rho}) - b(X,Y)\frac{k}{l} = Kg(X,Y) \ ,$$

*где* $K = \dfrac{k(1-k)}{\rho}$ .

**Доказательство**. В силу (8), (9) и условия $k(1-k) \neq 0$, получим

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (X\ln k)Y + (Y\ln k)X + \frac{\rho}{k(k-1)}(\overline{b}(X,Y)(\frac{h}{l} - \frac{m}{\rho}) - b(X,Y)\frac{k}{l})W\ .$$

С другой стороны, если $f$ конформное отображение $[4]$, то

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (X\ln k)Y + (Y\ln k)X - g(X,Y)W\,.$$

Откуда следует утверждение теоремы.

**Следствие 4**. *Если* $n>2$ *и центральная проекция* $f$ *есть конформное отображение на плоскость, не являющееся соответствием Петерсона, то* $M$ *локально гиперсфера*.

**Доказательство**. Если $\overline{M}$ гиперплоскость, то $\overline{b} = 0$ и

$$b(X,Y) = \frac{(k-1)l}{\rho}g(X,Y) \ , \ (k-1)l \neq 0\,,$$

т.е. $M$ - локально гиперсфера.

*Библиографический список*

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т.2 . 414 с.

2. Чешкова М. А. О паре гиперповерхностей в евклидовом пространстве // Геометрия многомерных пространств: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Алтайский ун-т. Барнаул, 1994. С. 78-85.

3. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия. М.: ГИФМЛ, 1963. 540 с.

4. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990. Т. 1. 318 с.

M. A. C h e s h k o v a

ON A GEOMETRY OF A CENTRAL PROJECTION
OF A PAIR OF HYPERSURFACES

A pair of smooth hypersurfaces M, M and the central projection f: M→ M in Euclidean space are examined.

УДК 514.76

## СВЯЗНОСТИ ГОЛОНОМНЫХ И НЕГОЛОНОМНЫХ ЦЕНТРОПРОЕКТИВНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Ю.И. Шевченко

(*Калининградский государственный университет*)

Понятия проективной связности и пространства проективной связности определяются разными методами, имеют различный смысл и продолжают развиваться [1]-[17]. Широко известны объект проективной связности Томаса, проективная связность Картана, центропроективная и проективная связности в главных расслоениях соответствующих реперов. На дифференцируемом многообразии применяются разнообразные способы описания проективных связностей [18]-[22].

В статье производится одна из возможных проективизаций дифференцируемого многообразия, в результате которой касательные пространства многообразия становятся центропроективными пространствами той же размерности. Такое многообразие называется центропроективным. Выделяются голономные и неголономные центропроективные многообразия. С помощью этих многообразий естественно определяются центропроективная связность в голономном и него-