бифуркации $\nu = \nu_c$ на фазовой полупрямой $0 \le r < \infty$ динамической системы (I) появляется аттрактор, то в результате того же перехода в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ многомерной динамической системы (2) рождается притягивающий инвариантный эллипсоид.

Систему (2) можно обобщить, рассматривая динамические системы с фазовыми пространствами, для которых существует дифференцируемое вложение в $M \times T$, где M – симплектическое многообразие интегрируемой гамильтоновой системы, а T – область некоторого евклидова пространства, в котором действует фазовый поток, порожденный линейным уравнением $\dot{x} = Jx$, причем T есть инвариантное многообразие этого потока. Решение проблемы интегрируемости в этом случае состоит в построении указанного дифференцируемого отображения. В некоторых случаях M может быть фазовым пространством простой интегрируемой системы, в частности, для уравнения (2) $M = [0; +\infty)$, $T = S_\ell$.

Библиографический список

I. А р н о л ь д В.И., А ф р а й м о в и ч В.С., И л ь я ш е н к о Ю.С., Ш и л ь н и к о в Л.П. Теория бифуркаций // Совр. проблемы матем. Фундамен. направления / ВИНИТИ. М., 1985. Т.5. С.5-218.

2. Palis J., Melo W. Geometric Theory of Dynamical Systems. An Introduction. N.Y.: Springer-Verlag, 1982. 198 pp.

3. Marsden J.E., Mc Craken M. The Hopf Bifurcation and Its Applications // Appl. Math. Sciences / N.Y.: Springer-Verlag, 1976. V.19. 408 pp.

4. Д у б р о в и н Б.А., Н о в и к о в С.П., Ф о м е н к о А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 760 с.

5. Ф о м е н к о А.Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 414 с.

6. А н д р о н о в А.А., В и т т А.А., Х а й к и н С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 926 с.

УДК 514.75

ОБ ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ИЗОТРОПНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В НЕВЫРОЖДЕННЫХ НЕЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е.Т.И в л е в

(Томский политехнический университет)

Проведена классификация изотропных m-мерных поверхностей V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$, когда текущая точка $V \in V_m$ лежит на абсолюте Q пространства ${}^{\ell}S_{n+1}$. Эта классификация аналогична той, которая проводится в [1] для неизотропных m-поверхностей V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$. Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1] – [4].

1. Рассматривается случай изотропной m-поверхности V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$, когда $V = A_0 \in Q$, т.е. с учетом ([1], (2), (5)), когда

$$g_{00} \equiv (A_0, A_0) = 0. \qquad (I)$$

В этом случае репер R m-поверхности V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$, о котором идет речь в ([1], п.I), выберем так, чтобы

$$g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \quad g_{n+1,j} = 0, \quad g_{n+1,n+1} = 0, \quad g_{n+1,0} = 1, \\ \varepsilon_i, & i = j; \quad \varepsilon_i = \pm 1 \quad (i, j, k, \ell = \overline{1,n}). \end{cases} \qquad (2)$$

Тогда соотношения ([1], (9)) в силу (I) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} &\omega_\alpha^{n+1} = A_{\alpha\gamma}^{n+1} \omega_0^\gamma, \quad \omega_a^{n+1} = 0, \quad \omega_0^{n+1} = 0, \quad \omega_{n+1}^0 = 0, \quad \omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = 0, \\ &\omega_0^\alpha = A_{a\gamma}^\alpha \omega_0^\gamma, \ \varepsilon_\alpha \omega_\beta^\alpha + \varepsilon_\beta \omega_\alpha^\beta = 0 \ (\text{по } \alpha \text{ и } \beta \text{ не суммировать}), \\ &\omega_{n+1}^k = -\varepsilon_k \omega_k^0, \ \varepsilon_a \omega_b^a + \varepsilon_b \omega_a^b = 0 \ (\text{по } a \text{ и } b \text{ не суммировать}), \\ &\qquad \alpha, \beta, \gamma = \overline{1,m}; \quad a, b, c = \overline{m+1,n}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где с учетом ([1], (6), (3))

$$A_{\alpha\gamma}^{n+1} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \gamma, \\ -\varepsilon, & \alpha = \gamma, \end{cases} \qquad A_{a\beta}^\alpha = -\varepsilon_\alpha \varepsilon_a A_{\alpha\beta}^a, \qquad (4)$$

$$\nabla A_{a\beta}^\alpha + A_{a\beta}^\alpha \omega_0^0 - \delta_\beta^\alpha \omega_a^0 = A_{a\beta\gamma}^\alpha \omega_0^\gamma. \qquad (5)$$

Из ([I], (I)) с учетом (2) и (I) следует, что абсолют Q в рассматриваемом репере определяется следующим уравнением:

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \varepsilon_\alpha (x^\alpha)^2 + \sum_{a=m+1}^{n} \varepsilon_a (x^a)^2 + x^0 x^{n+1} = 0, \qquad (6)$$

причем число отрицательных ε_i равно числу ℓ .

Из (6) и ([1], (5)) заключаем, что линейные подпространства

$$L^*_n = (A_0 A_1 \dots A_n), \quad \tilde L_{n-m} = (A_0 A_{m+1} \dots A_n) \qquad (7)$$

поляры точке A_0 и m-плоскости L_m относительно абсолюта и конуса $Q \cap L^*_n$ соответственно, причем точка $A_{n+1} \in Q$, а репер $R = \{A_i\}$ - ограничение репера $R = \{A_J\}$ $(J, \mathcal{Y}, K, L = \overline{0, n+1})$ на гиперплоскость L^*_n - является автополярным нормированным репером относительно $\bar Q = L^*_n \cap Q$. Заметим с учетом (3), (7) и ([1], (3)), что линейное подпространство $\tilde L_{n-m}$ в каждой точке $A_0 \in V_m$ является также I-характеристикой или характеристическим элементом гиперплоскости L^*_n.

2. Как и в ([4], (54), (55)) с учетом (3) и (7) находим, что линейная поляра $\tilde L_{n-m-1}$ точки A_0 относительно фокусной алгебраической поверхности $(n-m)$-плоскости $\tilde L_{n-m}$ определяется уравнениями:

$$m x^0 + x^a A^\alpha_{a\alpha} = 0, \quad x^\alpha = 0, \quad x^{n+1} = 0. \qquad (8)$$

Проведем с учетом ([1], (3)), (3) и (5) в точке $A_0 \in V_m$ такую дальнейшую фиксацию репера R, при которой

$$\begin{cases} A^\alpha_{a\alpha} = 0 \Rightarrow \omega^0_a = A^0_{a\beta}\omega^\beta_0, \quad A^0_{a\alpha} = -\frac{1}{m} A^\beta_{a\beta\alpha}, \\ \nabla A^0_{a\beta} + 2A^0_{a\beta}\omega^0_0 - A^\alpha_{a\beta}\omega^0_\alpha = A^0_{a\beta\gamma}\omega^\gamma_0. \end{cases} \qquad (9)$$

Из (8) следует, что геометрическая фиксация (9) означает, что

$$\tilde L_{n-m-1} = (A_{m+1} \dots A_n). \qquad (10)$$

Из (3) в силу (9) и ([1], (3)) получаются следующие соотношения:

$$\begin{cases} \omega^a_{n+1} = A^a_{n+1,\alpha}\omega^\alpha_0, \quad A^a_{n+1,\alpha} = -\varepsilon_a A^0_{a\alpha}, \\ \nabla A^a_{n+1,\alpha} + 2A^a_{n+1,\alpha}\omega^0_0 + A^a_{\alpha\beta}\omega^\beta_{n+1} = A^a_{n+1,\alpha\beta}\omega^\beta_0. \end{cases} \qquad (11)$$

Из (6) и (10) следует, что $(m+1)$-плоскость

$$\Gamma_{m+1} = (A_0 A_1 \dots A_m \ A_{n+1}) \qquad (12)$$

полярно сопряжена $(n-m-1)$-плоскости $\tilde L_{n-m-1}$ относительно абсолюта Q.

3. Рассмотрим следующие величины, определяемые в силу (9) и (11) соответствующими дифференциальными уравнениями:

$$a^0_{\alpha\beta\gamma} = A^a_{\alpha\beta}A^0_{a\gamma}, \quad \nabla a^0_{\alpha\beta\gamma} + a^0_{\alpha\beta\gamma}\omega^0_0 - a^\sigma_{\alpha\beta\gamma}\omega^0_\sigma = a_{\alpha\beta\gamma\tau}\omega^\tau_0;$$

$$a^\sigma_{\alpha\beta\gamma} = A^a_{\alpha\beta}A^\sigma_{a\gamma}, \quad \nabla a^\sigma_{\alpha\beta\gamma} + a^\sigma_{\alpha\beta\gamma}\omega^0_0 = a^\sigma_{\alpha\beta\gamma\tau}\omega^\tau_0;$$

$$a^0_\alpha = a^0_{(\alpha\beta\gamma)} g^{\beta\gamma}, \quad \nabla a^0_\alpha + a^0_\alpha\omega^0_0 - a^\tau_\alpha\omega^0_\tau = a_{\alpha\beta}\omega^\beta_0; \qquad (13)$$

$$a^\sigma_\alpha = a^\sigma_{(\alpha\beta\gamma)} g^{\beta\gamma}, \quad \nabla a^\sigma_\alpha + a^\sigma_\alpha\omega^0_0 = a^\sigma_{\alpha\beta}\omega^\beta_0;$$

$$g_{\beta\gamma} \cdot g^{\gamma\alpha} = \delta^\alpha_\beta, \quad g^{\beta\gamma} = \begin{cases} \varepsilon_\beta, & \beta = \gamma; \\ 0, & \beta \ne \gamma. \end{cases}$$

Можно показать, что в общем случае на изотропной m-поверхности V_m в ${}^\ell S_{n+1}$

$$a \equiv \det[a^\sigma_\alpha] \ne 0.$$

Поэтому с помощью величин (13) можно провести следующую заключительную фиксацию репера R:

$$a^0_\alpha = 0, \quad a \ne 0, \qquad (14)$$

что в силу (13) приводит к соотношениям:

$$\omega^0_\tau = A^0_{\tau\beta}\omega^\beta_0, \quad \nabla A^0_{\tau\beta} + 2A^0_{\tau\beta}\omega^0_0 = A^0_{\tau\beta\gamma}\omega^\gamma_0. \qquad (15)$$

Здесь величины $A^0_{\tau\beta}$ определяются из системы линейных уравнений

$$a^\tau_\alpha A^0_{\tau\gamma} = -a_{\alpha\gamma}$$

с определителем $a \ne 0$.

Из (15) и (3) получаются следующие соотношения на изотропной m-поверхности V_m в ${}^\ell S_{n+1}$:

$$\begin{cases} \omega^\alpha_{n+1} = A^\alpha_{n+1,\beta}\omega^\beta_0, \quad A^\alpha_{n+1,\beta} = -\varepsilon_\alpha A^0_{\alpha\beta}, \\ \nabla A^\alpha_{n+1,\beta} + 2A^\alpha_{n+1,\beta}\omega^0_0 = A^\alpha_{n+1,\beta\gamma}\omega^\gamma_0. \end{cases} \qquad (16)$$

Заметим, что величины (13) определяются так же, как и величины ([4], (71), (73)). Отличие состоит в том, что вместо величин $\Lambda^{\beta\gamma}$ ([4], (73)) в (13) рассматриваются величины $g^{\beta\gamma}$. Поэтому при геометрической характеристике $(m-1)$-плоскости $L^*_{m-1} : A_0 \notin L^*_{m-1}, L^*_{m-1} \subset L_m$ для каждой точки $A_0 \in V_m$ ([4], с.69-70) вместо конуса ([4], (34)) надо рассматривать конус $Q \cap L_m$. Поэтому в силу ([4], (72)-(74)) фиксация репера R изотропной m-поверхности V_m в ${}^\ell S_{n+1}$ типа (14) характеризуется тем, что

$$P_{II} = L^*_{m-1} = (A_1 A_2 \dots A_m). \qquad (17)$$

При этом из рассмотрения исключается случай $a = 0$, когда $(m-1)$-плоскость L^*_{m-1} определяется неединственным способом, или она вовсе не существует.

Из (15) и (16) с учетом (6) и (17) замечаем, что нормаль

P_I к V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$:

$$P_I = (A_0 A_{m+1} \dots A_{n+1}) \qquad (18)$$

полярно сопряжена нормали второго рода $P_{\text{II}} = L^*_{m-1}$ относительно абсолюта Q.

Из условия $A_{n+1} \in Q$ в силу (18) и (12) следует, что

$$A_{n+1} = (\Gamma_{m+1} \cap P_I) \cap Q. \qquad (19)$$

4. Учитывая (18), замечаем, что изотропная m-поверхность V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$ оказывается внутренним образом оснащенной нормалями первого рода. Поэтому к такой поверхности можно применить результаты статьи [2]. При этом точка A_{n+1} геометрически определена в смысле (19), причем рассматриваемая изотропная m-поверхность V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$ с учетом ([2], (28), (32)) и (4) не может быть m-поверхностью каждого из классов S^4_m и $S_{m,\tau}$ (в силу выбора репера R).

Из (10), (19) и (17) замечаем, что каждой точке $A_0 \in V_m$ отвечает гиперплоскость

$$G_n = (A_1 A_2 \dots A_{n+1}) = P_{\text{II}} \cup \tilde{L}_{n-m-1} \cup A_{n+1}. \qquad (20)$$

Если точка $X = x^{\alpha} A_{\alpha} + x^a A_a + x^{n+1} A_{n+1}$ описывает $Ch\,G_n$-характеристический элемент гиперплоскости G_n, то из

$$(dX \; A_1 A_2 \dots A_{n+1}) = 0$$

в силу ([1], (3)), (3), (9), (15) и (20) получаем

$$x^{\alpha} \overset{0}{A}_{\alpha\beta} + x^a \overset{0}{A}_{a\beta} = 0. \qquad (21)$$

Из (21), ([2], (28)), (3), (10) и (16) вытекают следующие теоремы.

Т е о р е м а 1. Изотропная m-поверхность V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$ является m-поверхностью класса S^3_m.

Т е о р е м а 2. Изотропная m-поверхность V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$ является m-поверхностью класса S^1_m (S^2_m) тогда и только тогда, когда $Ch\,G_n \supset P_{\text{II}}$ ($Ch\,G_n \supset \tilde{L}_{n-m-1}$).

Заметим, что изотропная m-поверхность V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$ каждого из классов S^1_m и S^2_m обладает теми же геометрическими свойствами, которые определяются соответствующими инвариантными связностями в [3].

Библиографический список

1. И в л е в Е.Т. Об одной классификации неизотропных многомерных поверхностей в невырожденных неевклидовых пространствах // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1994. Вып.25. С.51-55.

2. И в л е в Е.Т. Об одной классификации оснащенных многомерных поверхностей проективного пространства // Там же, 1991. Вып.22. С.49-56.

3. И в л е в Е.Т. Об инвариантных расслоениях и связностях в них на оснащенной поверхности проективного пространства // Там же, 1992. Вып.23. С.41-45.

4. **И в л е в Е.Т. Об одной нормализации многомерной поверхности пространства проективной связности // Там же, 1974. Вып.4. С.6-28.**

УДК 514.76+517.93

ПРОБЛЕМА ТРИВИАЛЬНОСТИ ДЛЯ КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

В.А.И г о ш и н

(Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского)

Решена проблема локальной изоморфности квазигеодезического потока (КП) - обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка простейшему (тривиальному) КП, который описывается координатным уравнением $d^2x^i/dt^2 = 0$.

1. Все объекты будут предполагаться дифференцируемыми достаточное число раз. Пусть M - многообразие, $\dim M = n-1$; $(M,f) \equiv f$ - квазигеодезический поток на M, локально (в пределах каждой карты (U, x^i), $1 \le i \le n-1$) представленный уравнением

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = f^i\left(x^j, t, \frac{dx^i}{dt}\right). \qquad (1)$$

Как известно [1] - [4], в пространстве событий $\bar{M} = M \times R$ КП f существует пульверизация $\mathcal{D}$, геодезические $(x(\tau), t(\tau)) = \tilde{x}(\tau)$ которой моделируют своими проекциями $x(\tau) = P_{\tau}\tilde{x}(\tau)$ траектории $x(t)$ КП f: $x(t) = P_{\tau}\tilde{x}(\tau(t))$. При этом пульверизация в естественных координатах (адаптированных к произведению)