УДК 514.763.8

Г.А. Б а н а р у

(*Смоленский государственный университет*)

ОБ УСЛОВИИ, НАЛАГАЕМОМ НА УРАВНЕНИЕ $y'''=f(x,y,y',y'')$, ДОПУСКАЮЩЕЕ СВЯЗНОСТЬ С 5-МЕРНОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППОЙ

Как известно [1], ко всякому обыкновенному дифференциальному уравнению 3-го порядка

$$y'''=f(x,y,y',y'') \tag{1}$$

инвариантным (относительно псевдогруппы точечных аналитических преобразований координат) образом присоединяется расслоенное пространство со связностью. Для уравнения общего вида фундаментальной группой связности является группа $g_{2,6}$ (3). Она имеет размерность, равную семи, т. е. максимально возможную. Вполне естественным образом возникает вопрос: а существуют ли уравнения, для которых размерность p фундаментальной группы расслоения равна шести, пяти и так далее? В [3] эта задача решена для 6-мерной фундаментальной группы. Оказалось, что уравнение (1) допускает инвариантное присоединение к себе связности с 6-мерной фундаментальной группой в том и только в том случае, когда оно с точностью до точечной аналитической замены координат эквивалентно уравнению вида:

$$y'''=A(y'')^2+By''+C,$$

где $A,B,C=A,B,C(x,y,y')$; $\quad A\neq \dfrac{3}{\acute{o}' + D(\tilde{o}, \acute{o})}$,

причем единственно возможной 6-мерной фундаментальной группой для такого уравнения является группа $g_{4,2}$.Настоящая работа посвящена анализу проблемы в случае, когда p=5.

Итак, рассмотрим уравнение (1). Приведем структурные уравнения Картана расслоенного пространства со связностью общего типа, присоединенного к этому уравнению [2]:

$$\begin{gathered}
D\omega^1=\omega^1\wedge\omega_1^1+\Omega^1,\ D\omega^2=\omega^1\wedge\omega_1^2+\omega^2\wedge\omega_2^2,\\
D\omega_1^2=\omega_1^2\wedge(\omega_2^2-\omega_1^1)+\omega^1\wedge\omega_{11}^2+\omega^2\wedge\omega_{11}^1,\\
D\omega_{11}^2=\omega_{11}^2\wedge(\omega_2^2-2\omega_1^1)+\omega_1^2\wedge\omega_{11}^1+\Omega_{11}^2;\\
D\omega_1^1=\omega^1\wedge\omega_{11}^1+\Omega_1^1,\ D\omega_2^2=\omega^1\wedge\omega_{11}^1+\Omega_2^2,\\
D\omega_{11}^1=\omega_1^1\wedge\omega_{11}^1+\Omega_{11}^1.
\end{gathered} \tag{2}$$

Формы кручения-кривизны в уравнениях (2) имеют вид:

$$\Omega^1=\frac{1}{2}(a\omega_1^2+b\omega_{11}^2)\wedge\omega^2,\ \Omega_{11}^2=\frac{1}{2}(c\omega^1-e\omega_1^2)\wedge\omega^2,$$

$$\Omega_1^1=\frac{1}{2}(g\omega^1+h\omega_1^2+k\omega_{11}^2)\wedge\omega^2+\frac{1}{2}b\omega_{11}^2\wedge\omega_1^2,$$

$$\Omega_2^2=\frac{1}{2}[3g\omega^1+(3h-2m)\omega_1^2+(3k-2a)\omega_{11}^2]\wedge\omega^2+\frac{1}{2}b\omega_1^2\wedge\omega_{11}^2, \qquad (3)$$

$$\Omega_{11}^1=(\frac{1}{2}e+g)\omega^1\wedge\omega_1^2+\frac{1}{2}[n\omega^1+r\omega_1^2+(h+m)\omega_{11}^2]\wedge\omega^2+$$

$$+(\frac{1}{2}a-k)\omega_1^2\wedge\omega_{11}^2.$$

Коэффициенты a, b, c, e, g, h, k, m, n, r образуют полную систему дифференциальных инвариантов уравнения (1). Выпишем выражения для их дифференциалов [3]:

$$da+2a(\omega_1^1-\omega_2^2)-b\omega_{11}^1=h\,\omega^1+\dots,\ db+b(3\omega_1^1-2\omega_2^2)=(k-a)\,\omega^1+\dots,$$

$$dc-3c\,\omega_1^1=\sigma_1,\ de-e(\omega_1^1+\omega_2^2)=\sigma_2,\quad dg-g(\omega_1^1+\omega_2^2)=\sigma_3,$$

$$dh+h(\omega_1^1-2\omega_2^2)+(a-k)\omega_{11}^1=\sigma_4,\ dk+2k(\omega_1^1-\omega_2^2)=\sigma_5, \qquad (4)$$

$$dm+m(\omega_1^1-2\omega_2^2)=(r+bc)\,\omega^1+\dots,\ dn-n(2\omega_1^1+\omega_2^2)-(g+e)\omega_{11}^1=\sigma_6,$$

$$dr-2r\,\omega_2^2-m\omega_{11}^1=\sigma_7.$$

Правые части этих равенств - линейные комбинации форм ω^1, ω^2, ω_1^2 и ω_{11}^2.

Из соотношений (4) видно, что дифференциальные инварианты уравнения (1) либо являются относительными инвариантами, либо становятся ими в случае обращения в нуль некоторых относительных инвариантов.

Допустим, что фундаментальная группа связности, соответствующей уравнению (1), имеет размерность, равную пяти. Тогда среди его дифференциальных инвариантов есть хотя бы один, отличный от нуля (в противном случае [2] фундаментальной будет 7-мерная группа $g_{2,6}(3)$).

Пусть I - один из относительных инвариантов уравнения (1). Тогда его дифференциал удовлетворяет соотношению:

$$dI+I(s_1\omega_1^1+s_2\omega_2^2)=t_1\omega^1+t_2\omega^2+t_3\omega_1^2+t_4\omega_{11}^2, \qquad (5)$$

где t_j (j = 1,2,3,4)- некоторые новые инварианты уравнения .

Для I, как для всякого относительного инварианта, возможны два инвариантно различных случая: $I = 0$ и $I\neq 0$.Допустим, что $I\neq 0$. Проведем канонизацию I=1. Из (5) получим :

$$s_1\omega_1^1+s_2\omega_2^2=t_1\omega^1+t_2\omega^2+t_3\omega_1^2+t_4\omega_{11}^2. \qquad (6)$$

Продифференцируем это равенство внешним образом. В качестве одного из дифференциальных следствий получим соотношение:

$$dt_1-t_1\omega_1^1+(s_1+s_2)\,\omega_{11}^1=\sigma_1,$$

где σ_1-линейная комбинация главных форм касательного элемента второго порядка. Разумеется, в плоском случае, когда тензор кручения-кривизны в уравнениях (2) обращается в нуль, они должны являться уравнениями структуры фундаментальной группы. Следовательно, все инварианты, служащие коэффициентами уравнений (2), в частности, инвариант t_1, обязаны в этом случае быть константами. При этом условии последнее равенство имеет вид:

$$-t_1\omega_1^1+(s_1+s_2)\,\omega_{11}^1=\sigma_1\,. \tag{7}$$

Предположим, что инвариант s_2 отличен от нуля. Выразим из (6) форму ω_2^2 через остальные. Подставим полученное выражение в уравнения структуры (2). Второе уравнение станет выглядеть так:

$$D\omega^2=\omega^1\wedge\omega_1^2+\omega^2\wedge\left(-\frac{s_1}{s_2}\,\omega_1^1+\sigma_2\right)$$

(σ_2 - линейная комбинация главных форм касательного элемента второго порядка). Продифференцируем это уравнение внешним образом. Среди прочих получим соотношение $-\frac{s_1}{s_2}=1$ или $s_1+s_2=0$. Этому условию, как видно из (4), из относительных инвариантов удовлетворяет лишь инвариант k . Но в качестве отличного от нуля относительного инварианта k не годится , и вот почему: если допустить, что других отличных от нуля инвариантов уравнение (1) не имеет, то фундаментальной группой [3] окажется 6-мерная группа $g_{4,2}$; если же отличным от нуля будет еще хотя бы один инвариант, то, в силу (6) и (7), формы ω_1^1, ω_2^2 и ω_{11}^1 станут зависимыми от форм ω^1, ω^2, ω_1^2 и ω_{11}^2, а значит, фундаментальная группа не может иметь в этом случае размерность, большую четырех.

Следовательно, все относительные инварианты, для которых $s_2\neq0$, должны обращаться в нуль. Поэтому

$$b=e=g=k=m=0 \Rightarrow a=k=0\,;$$

при этом коэффициенты h, n и r становятся относительными инвариантами, для которых $s_2\neq0$. Проведя рассуждения, аналогичные предыдущим, получаем, что $c\neq0$. Воспользовавшись выражением для c в координатном виде [2], получаем, что справедлива

Теорема. *Если обыкновенное дифференциальное уравнение 3-го порядка (1) допускает инвариантное присоединение к себе связности с 5-мерной фундаментальной группой, то удовлетворяется соотношение*

$$6f_2+2f_3f_4+\frac{4}{9}(f_4)^3-2f_4(f_{41}+f_{42}y'+f_{43}y'')-ff_4f_{44}+f_{42}y''-2ff_{43}+f_{44}(f_1+f_2y'+f_3y'')-3f_{31}-$$
$$-3f_{32}y'-3f_{33}y''+f_{411}+2f_{421}y'+2f_{431}y''+2ff_{441}+f_{422}(y')^2+$$
$$+2f_{432}y'y''+2ff_{442}y'+f_{433}(y'')^2+2ff_{443}y''\neq0.$$

Здесь переменным x, y, y', y'' приписаны номера 1,2,3,4 соответственно и использованы обозначения:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_1,\ \frac{\partial f}{\partial y}=f_2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{12,\ldots}$$

Библиографический список

1. *Степанов Н. В.* Геометрия дифференциальных уравнений // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1981. Т.12. С.127-165.

2. *Банару Г.А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения 3-го порядка с 6-мерной и 7-мерной группами точечных симметрий // Вестн. МГУ. Сер.1. Мат. Мех. 1994. С.31-36.

3. *Banaru G.A.* Third-order ordinary differential equations and $g_{4,2}$-connection // Webs & Quasigroups. Tver, 1995. P.84-88.

G.A. B a n a r u

ON THE CONDITION IMPOSED ON EQUATION $y'''=f(x.y,y',y'')$, PERMITTING CONNECTION WITH 5-DIMENTIONAL FUNDAMENTAL GROUP

Necessary condition is found, that ordinary differential equation of 3-nd order should admit addition to itself connection with 5-dimensional fundamental group.

УДК 514.763.8

М.Б. Б а н а р у

(Смоленский гуманитарный университет)

О 6-МЕРНЫХ ЭРМИТОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

Одним из наиболее красивых и содержательных примеров эрмитовых многообразий являются 6-мерные ориентируемые подмногообразия алгебры октав. Приводится ряд результатов о свойствах таких многообразий.

Напомним, что эрмитовым называется многообразие M^{2n}, наделенное почти комплексной структурой J и римановой метрикой $g=\langle .,. \rangle$ при выполнении условий:

$$\langle JX,JY\rangle=\langle X,Y\rangle \ , \ X,Y \in ✠(M); \ [X,Y]+J[JX,Y]+J[X,JY]-[JX,JY]=0$$

1. Как известно, тензором Риччи ric риманова многообразия называется тензор, компоненты которого связаны с компонентами тензора римановой кривизны (тензора Римана-Кристофеля) следующим образом [1]:

$$ric_{ij} = R^{k}_{ijk} \ .$$

Этот тензор симметричен; значение соответствующей квадратичной формы на векторе X, $X \in ✠(M)$ называется кривизной Риччи и обозначается S(X).Таким образом,