УДК 550.388.2

В. Е. Захаров, Е. Н. Годованая

КОМПЛЕКСНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ЛУЧЕВЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ

Получена характеристическая система для уравнений комплексной геометрической оптики анизотропных сред с вещественными лучевыми траекториями.

Obtained the characteristic system of equations of complex geometrical optics for the case of real ray trajectories.

Ключевые слова: метод характеристик, характеристическая система для уравнений комплексной геометрической оптики с вещественными лучевыми траекториями.

Key words: method of characteristics, the characteristic system of equations of complex geometrical optics with real ray trajectories.

Введение

В [1] методом комплексной геометрической оптики исследовано распространение волн в сильно поглощающих анизотропных средах. Этот метод также применим для описания неоднородных волн в анизотропных средах без поглощения, в частности для описания экспоненциально затухающих волн в области каустической тени. В [1] записано формальное решение уравнения эйконала с использованием комплексных лучей. В качестве примера применения изложенной теории решена задача о поперечном распространении необыкновенной волны в плоско-слоистой среде.

В случае «плавно» неоднородных сред и при условии, что коэффициенты преломления двух нормальных волн заметно различаются между собой, взаимодействием таких волн между собой можно пренебречь [2].

Для описания распространения волн в «освещенной» области, без перехода в область каустической тени, достаточно использовать не комплексные, а вещественные лучевые траектории [3].

Цель работы — развитие метода комплексной геометрической оптики для случая вещественных лучевых траекторий.

Расчет характеристической системы для уравнений комплексной геометрической оптики с вещественными лучевыми траекториями

Запишем дисперсионное уравнение в локальном приближении для каждой из двух нормальных мод [1]:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = (1/2)(\mathbf{p}^2 - \mathrm{n}^2(\mathbf{r}, \boldsymbol{l})), \qquad (1)$$

где H — гамильтониан системы; $\mathbf{p}$ — комплексный импульс; n — комплексный показатель преломления среды; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения; $\boldsymbol{l}$ — комплексный вектор нормали к фазовому фронту волны, причем $\mathbf{p} = \mathrm{p}\boldsymbol{l}$; p — комплексная величина импульса и $\boldsymbol{l}^2 = 1$, так что $\mathrm{p} = \mathrm{n}$.

Для вещественных лучевых траекторий справедливо уравнение связи

$$\mathrm{Im}\,\mathbf{r} = 0. \qquad (2)$$

В произвольных обобщенных координатах q_i, где $\mathrm{i} = 1,2,3$ система (1) и (2) перепишется как

$$H(p_i, q_i) = 0, \qquad (3)$$

$$\mathrm{Im}\, q_i = 0, \qquad (4)$$

где p_i — импульс, сопряженный координате q_i.

Решение уравнений (3), (4) найдем методом характеристик. На гиперповерхности $H(p_\mathrm{i}, q_\mathrm{i}) = 0$ в фазовом пространстве $(\mathrm{p}_\mathrm{i}, \mathrm{q}_\mathrm{i})$ выполняется соотношение:

$$dH = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i\right) = 0. \qquad (5)$$

Соотношение (5) удовлетворяется тождественно, если

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i = 0,$$

откуда найдем

$$\frac{dq_i}{\partial H/\partial p_i} = -\frac{dp_i}{\partial H/\partial q_i} = d\tau_i, \tag{6}$$

где $d\tau_i$ — некоторая комплексная функция. Из (6) следует система уравнений для определения характеристик:

$$\frac{dq_i}{d\tau_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{7}$$

$$\frac{dp_i}{d\tau_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{8}$$

Выразим dq_i из (7) и подставим в (4), получим

$$\operatorname{Im} dq_i = \operatorname{Im}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}d\tau_i\right) = 0. \tag{9}$$

Представим $d\tau_i$ в алгебраическом виде как

$$d\tau_i = d\tau + j\,d\tau_i', \tag{10}$$

где τ — независимая переменная.

Подставим (10) в (9), имеем

$$d\tau_i' = -\frac{\operatorname{Im}(\partial H/\partial p_i)}{\operatorname{Re}(\partial H/\partial p_i)}d\tau. \tag{11}$$

Подставим (11) в (10), а результат — в (7), (8) и с учетом (9) найдем систему уравнений для определения характеристик:

$$\frac{dq_i}{d\tau} = \operatorname{Re}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\left(1+\left(\frac{\operatorname{Im}(\partial H/\partial p_i)}{\operatorname{Re}(\partial H/\partial p_i)}\right)^2\right), \tag{12}$$

$$\frac{dp_i}{d\tau} = -\left(1\text{-}j\frac{\operatorname{Im}(\partial H/\partial p_i)}{\operatorname{Re}(\partial H/\partial p_i)}\right)\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{13}$$

Связь комплексной функции эйконала ψ с комплексным импульсом дается выражением [1]

$$p_i = \partial\psi/\partial q_i. \tag{14}$$

С учетом уравнения (12) и (14) изменение эйконала вдоль каждой характеристики (лучевой траектории) описывается выражением

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\frac{dq_i}{d\tau} = \sum_{i=1}^{3}p_i\operatorname{Re}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\left(1+\left(\frac{\operatorname{Im}(\partial H/\partial p_i)}{\operatorname{Re}(\partial H/\partial p_i)}\right)^2\right). \tag{15}$$

Уравнения (12), (13) и (15) образуют полную характеристическую систему для уравнений (3), (4) и (15).

С учетом (1) конкретизируем выражения для производных гамильтониана H как

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial n^2}{\partial p_i} \equiv s_i(p_i, q_i) \tag{16}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial n^2}{\partial q_i}, \tag{17}$$

где s_i — обобщенные компоненты комплексного лучевого вектора.

Обобщим результат расчета, проведенного в [2], для величины $-(1/2)\partial n^2/\partial p_i = s_i - p_i$ на случай комплексной геометрической оптики.

Вектор $\mathbf{s}-\mathbf{p}$ характеризует различие между комплексными лучевым вектором и вектором импульса в анизотропной среде.

Имеем:

$$\frac{\partial n}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial n}{\partial l_j} \frac{\partial l_j}{\partial p_i},$$

где $\frac{\partial l_i}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{p_j}{p}\right) = \frac{1}{p}\left(\delta_{ij} - l_i l_j\right) = \frac{1}{n}\left(\delta_{ij} - l_i l_j\right)$ и δ_{ij} — символ Кронекера.

Получаем, что выражение

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial n^2}{\partial p_i} = -\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial n}{\partial l_j} \; \delta_{ij} - l_i l_j \qquad (18)$$

из [2] остается справедливым и в случае комплексной геометрической оптики.

Выражение (18) можно переписать в векторной форме как в [2]:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial m^2}{\partial p_i} = l \times \left(l \times \frac{\partial n}{\partial l} \right). \qquad (19)$$

Выводы

Основной результат данной работы — это получение характеристической системы (12), (13) и (15) для уравнений (3), (4) и (14) комплексной геометрической оптики анизотропных сред с вещественными лучевыми траекториями. При интегрировании этой системы не надо решать задачу об аналитическом продолжении функции показателя преломления среды в область комплексных значений радиус-вектора точки наблюдения. Сами же лучевые траектории остаются в освещенной области, не выходя в область каустической тени.

Список литературы

1. *Кравцов Ю. А., Яшин Ю. Я.* Комплексная геометрическая оптика неоднородных анизотропных сред // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 1969. Т. 12, №5. С.674—685.

2. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М., 1980.

3. *Кравцов Ю. А.* Комплексные лучи и комплексные каустики // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 1967. Т. 10, №9—10. С. 1283—1304.

Об авторах

В. Е. Захаров — д-р физ.-мат. наук, проф., РГУ им. И. Канта.

Е. Н. Годованая — студ., РГУ им. И. Канта.

Authors

V. Zakharov — Prof., IKSUR.

E. Godovanaya — student, IKSUR.