9. *Эйзенхарт Л.П.* Риманова геометрия. М., 1948.
10. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1991. Т. 1.
11. *Постников М.М.* Дифференциальная геометрия. Семестр IV. М., 1988. С. 167.

S. Stepanov, I. Tsyganok, J. Mikeš

Liouville type theoremabout projective mapping of complete Riemannian manifold

In the present paper we prove a vanishing theorem for projective diffeomorphisms of a Riemannian complete manifolds. We will use the well-known Yau Liouville type theorem for complete Riemannian manifolds.

*Key words:*complete Riemannian manifold, projective diffeomorphism.

УДК 514.75

М.А. Чешкова
Алтайский государственный университет, Барнаул
cma@math.asu.ru

Инверсия скрещенного колпака и римской поверхности

Если вдоль некоторой замкнутой кривой на поверхности локальная ориентация в касательном пространстве меняет знак, то поверхность называется односторонней. Простейшей односторонней поверхностью является лист Мёбиуса. К односторонним поверхностям относится также скрещенный колпак, римская поверхность, скрещенный колпак с крышкой являются моде-

лями проективной плоскости. Изучается инверсия римской поверхности и скрещенного колпака. С помощью системы компьютерной математики строятся рассматриваемые поверхности.

Ключевые слова: *с*крещенный колпак, лист Мёбиуса, римская поверхность, проективная плоскость, инверсия.

Впервые уравнение односторонней поверхности, открытой Мёбиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мёбиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2]. В [3—6] изучаются односторонние поверхности.

Если на поверхности в E^n существует замкнутая кривая (дезориентирующий контур), обладающая тем свойством, что при ее обходе локальная ориентация в касательном пространстве меняет знак, то поверхность называется односторонней.

В евклидовом пространстве рассмотрим две гладкие вектор-функции $s = s(u)$, $l = l(u)$, $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi, \pi]$. Предполагается, что $s = s(u)$ есть 2π-периодическая, $l = l(u)$ есть 2π-антипериодическая функции, и векторное произведение $[s'(u), l(u)] \neq 0$.

Определим поверхность P уравнением

$$r(u,v) = (1 + \cos(v))s(u) + \sin(v)l(u), \tag{1}$$

$$u \in [-\pi, \pi], \; v \in [-\pi, \pi].$$

Теорема 1. *Поверхность* P *определяет модель проективной плоскости, а линия* $r = 2s(u)$ *есть дезориентирующий контур поверхности.*

Доказательство. Рассмотрим проективную плоскость как фактор-пространство [7, с. 75]

$$[-\pi, \pi]X[-\pi, \pi]/[(-\pi, -v) \approx (\pi, v), (-u, -\pi) \approx (u, \pi)].$$

Так как $s(u+2\pi)=s(u)$, $l(u+2\pi)=-l(u)$, то $r(-\pi,-v)=$ $=r(\pi,v)$, $r(-u,-\pi)=r(u,\pi)$, и поверхность P определяет модель проективной плоскости. Из (1) следует

$$r_u=(1+\cos(v))s'(u)+\sin(v)l'(u),$$

$$r_v=-\sin(v)s(u)+\cos(v)l(u).$$

Исследуем вектор нормали $n=[n_u,n_v]$. Имеем

$$\begin{gathered}n=[r_u,r_v]=\cos(v)(1+\cos(v)[s'(u),l(u)]+\\+\sin(v)\cos(v)[l(u),l'(u)],\end{gathered} \tag{2}$$

$$n(u,0)=2[s'(u),l(u)],\ n(u+2\pi,0)=-2[s'(u),l(u)].$$

Откуда следует, что кривая $r(u,0)=2s(u)$ есть дезориентирующий контур.

Рассмотрим инверсию

$$r^*-r_0=\frac{m^2(r-r_0)}{<r-r_0,r-r_0>} \tag{3}$$

относительно сферы радиуса m с центром r_0.

Теорема 2. *Если поверхность P не проходит через центр инверсии, то инверсияповерхности P есть модель проективной плоскости. Дезориентирующий контур при инверсии переходит в дезориентирующий контур.*

Доказательство. Обозначим $\varphi=<r-r_0,r-r_0>$.

Так как $\varphi(-\pi,-v)=\varphi(\pi,v)$, $\varphi(-u,-\pi)=\varphi(u,\pi)$ и $r^*(-\pi,-v)=r^*(\pi,v)$, $r^*(-u,-\pi)=r^*(u,\pi)$, то поверхность $r^*=r^*(u,v)$ является моделью проективной плоскости.

Имеем

$$r_u^*=-\frac{m^2}{\phi^2}\phi_u(r-r_0)+\frac{m^2}{\phi}r_u,\, r_v^*=-\frac{m^2}{\phi^2}\phi_v(r-r_0)+\frac{m^2}{\phi}r_v,$$

$$n^* = [r_u^*, r_v^*] = -\frac{m^4}{\phi^3}\phi_u[r - r_0, r_v] - \frac{m^4}{\phi^3}\phi_v[r_u, r - r_0] + \\ + \frac{m^4}{\phi^2}[r_u, r_v], \phi_u = 2 < r_u, r - r_0 >, \phi_v = 2 < r_v, r - r_0 > . \tag{4}$$

Полагаем $v = 0$, получим

$$r = 2s(u),\ r_u = 2s'(u),\ r_v = 0,$$

$$\phi = 4 < s(u),\ s(u) > -4 < s(u), r_0 > + < r_0, r_0 >,$$

$$\phi_u = 2 < 2s'(u),\ 2s(u) - r_0 >,\ \phi_v = 2 < 2l(u),\ 2s(u) - r_0 >,$$

$$\phi(u + 2\pi) = \phi(u),\ \phi_u(u + 2\pi) = \phi_u(u),\ \phi_v(u + 2\pi) = -\phi_v(u),$$

$$r_u(u + 2\pi) = r_u(u),\ r_v(u + 2\pi) = -r_v(u).$$

Из (3) и (4) следует $n^*(u + 2\pi, 0) = -n^*(u, 0)$. Теорема доказана.

Исследуем поверхности, когда P есть скрещенный колпак с крышкой, и P есть римская поверхность.

Пример 1. *Поверхность P есть скрещенный колпак с крышкой.*

Положим в (1)

$$s(u) = (\cos(u), \sin(u), 0),$$
$$l(u) = (\cos(u)\cos(u/2), \sin(u)\cos(u/2), \sin(u/2)).$$

Имеем

$$r(u,v) = (1 + \cos(v))(\cos(u), \sin(u), 0)) + \\ + \sin(v)(\cos(u)\cos(u/2), \sin(u)\cos(u/2), \sin(u/2)). \tag{5}$$

Обозначим заданную поверхность через K, а дезориентирующий контур через dk. Из теоремы 1 следует, что окружность $r = 2s(u)$ есть дезориентирующий контур поверхности K.

Итак,

$$dk : r = r(u,0) = 2(\cos(u), \sin(u), 0)\ . \tag{6}$$

Поверхность имеет пересечение — отрезок прямой

$$pk: r = r(0, v) = (1 + \cos(v) + \sin(v))(1, 0, 0). \qquad (7)$$

Построим их (дезориентирующий контур — светлый).

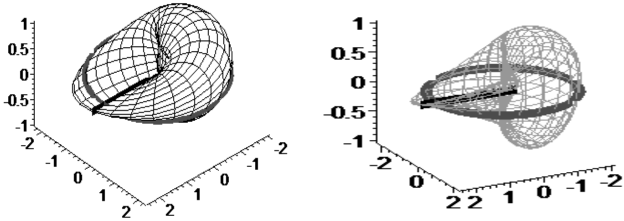


Рис. 1. Поверхность K и кривые pk, dk

Рассмотрим инверсию (3). Для поверхности K обозначим поверхность $r^* = r^*(u, v)$ через K^*, а кривую $r^* = r^*(0, v)$ — через pk^*. Определим их и построим.

Положим $r_0 = (1, 1, 1)$, $m = 2$. Тогда

$$pk^* = \frac{4}{3 + 2\cos(v)\sin(v)}(\sin(v) + \cos(v), -1, -1) + (1, 1, 1), \qquad (8)$$

$$dk^* = \frac{4}{7 - 4\cos(u) - 4\sin(u)}(2\cos(u) - 1, 2\sin(u) - 1, -1) + (1, 1, 1).$$

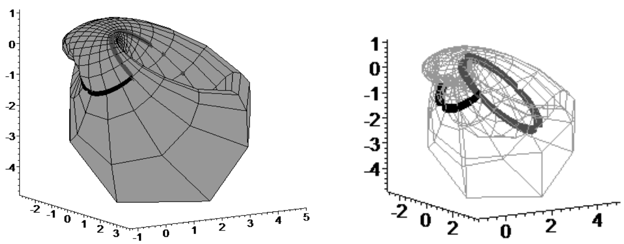


Рис. 2. Поверхность K^* и кривые pk^*, dk^*

Пример 2. *Римская поверхность.* Положим в (1)
$s(u) = (0, 0, -1/4\sin(u)),\ l(u) = (1/2\cos(u/2), 1/2\sin(u/2), 0).$

Имеем

$$r(u,v) = (1+\cos(v))(0, 0, -1/4\sin(u)) + \\ +\sin(v)(1/2\cos(u/2), 1/2\sin(u/2), 0). \tag{9}$$

Линия $r = s(u)$ у этой поверхности есть отрезок прямой. В прямоугольных координатах данная поверхность определяется уравнением: $y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 + xyz = 0.$ Мы получили римскую поверхность Штейнера [3, с. 302]. Построим ее.

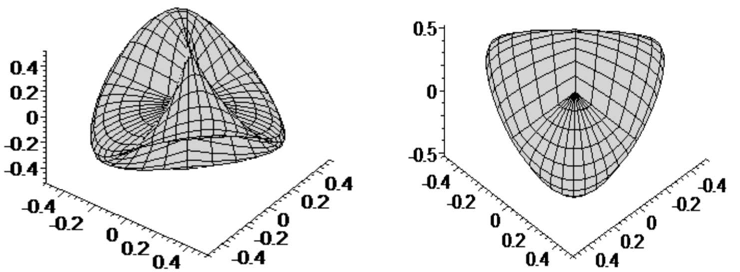


Рис. 3. Римская поверхность

Обозначим рассматриваемую поверхность через R.
Римская поверхность имеет три отрезка прямых

$$pr1 : r = r(0, v) = \frac{1}{2}\sin(v)(1, 0, 0),$$

$$pr2 : r = r(\pi, v) = \frac{1}{2}\sin(v)(0, 1, 0),$$

$$dr : r = r(u, 0) = -\frac{1}{2}\sin(u)(0, 0, 1). \tag{10}$$

Построим их.

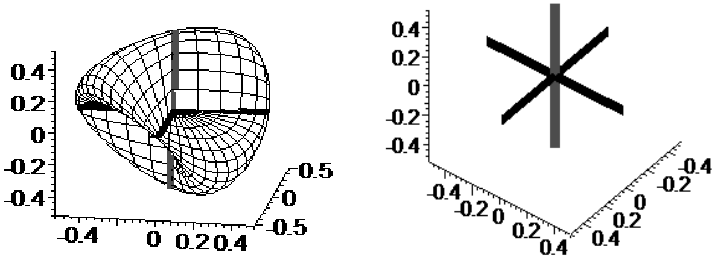


Рис. 4. Римская поверхность и кривые $pr1$, $pr2$, dr

Конечные точки отрезков $pr1, pr2, dr$ есть критические точки поверхности. Построим, например, фрагмент поверхности в окрестности точки $r(0, \pi/2)$.

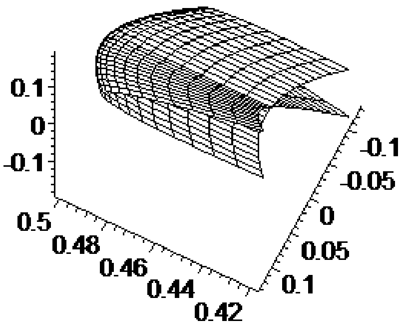


Рис. 5. Фрагмент римской поверхности
$u \in [-\pi/6, \pi/6]$, $v \in [\pi/2 - \pi/6, \pi/2 + \pi/6]$

Поверхность в окрестности критической точки имеет вид зонтика Уитни — Кэли [8, с. 229]. Такие точки называются точками пинча.

Для поверхности R обозначим поверхность $r^* = r^*(u,v)$ через R^*,а кривые $r^* = r^*(0,v)$, $r^* = r^*(\pi,v)$, $r^* = r^*(u,0)$ через $pr1^*$, $pr2^*$, dr^* .

Замечаем, что если центр инверсии не принадлежит ни одной из прямых, содержащих отрезки $pr1$, $pr2$, dr, то кривые $pr1^*$, $pr2^*$, dr^* являются дугами окружностей. Если центр инверсии находится на прямой, содержащей один из этих отрезков, но не на отрезке, то кривые $pr1^*$, $pr2^*$, dr^* являются: одна — прямая, две другие — дугами окружностей. Рассмотрим примеры построения поверхности R^* и кривых $pr1^*$, $pr2^*$, dr^*.

Пример 1. Положим $r_0 = (1, 1, 1)$, $m = 2$. Тогда

$$pr1^* = \frac{4}{1/4\sin^2(v) - \sin(v) + 3}(1/2\sin(v) - 1, -1, -1) + (1, 1, 1),$$

$$pr2^* = \frac{4}{1/4\sin^2(v) - \sin(v) + 3}(-1, 1/2\sin(v) - 1, -1) + (1,1,1),$$

$$dr^* = \frac{4}{1/4\sin^2(u) + \sin(u) + 3}(-1, -1, -1/2\sin(u)) + (1,1,1).$$

Построим поверхность R^* и кривые $pr1^*$, $pr2^*$, dr^*.

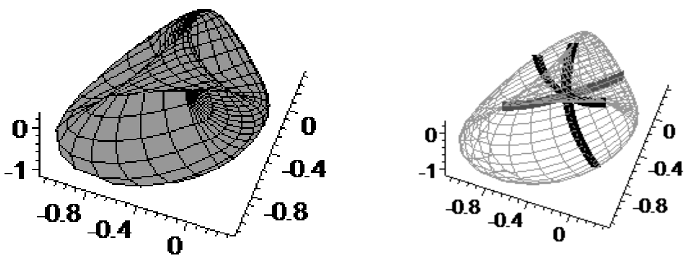


Рис. 6. Поверхность R^*
и кривые $pr1^*, pr2^*, dr^*$, $r_0 = (1, 1, 1)$, $m = 2$

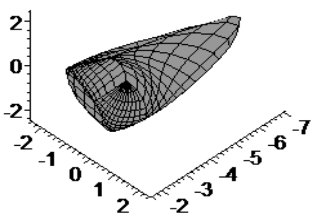
Пример 2. Положим $r_0 = (1, 0, 0)$**.** Тогда

$$pr1^* = \frac{4}{1/4\sin^2(v) - \sin(v) + 1}(1/2\sin(v) - 1, 0, 0) + (1, 0, 0),$$

$$pr2^* = \frac{4}{1/4\sin^2(v) + 1}(-1, 1/2\sin(v), 0) + (1, 0, 0),$$

$$dr^* = \frac{4}{1/4\sin^2(u) + 1}(-1, 0, -1/2\sin(u)) + (1, 0, 0).$$

Построим поверхность R^* и кривые $pr1^*$, $pr2^*$, dr^*.



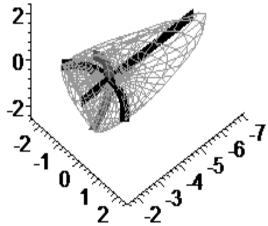


Рис. 7. Поверхность R^*
и кривые $pr1^*, pr2^*, dr^*$, $r_0 = (1, 0, 0)$**,** $m = 2$

При инверсии критические точки перейдут в критические точки. Построим фрагмент поверхности R^* в окрестности точки $r^*(0, \pi/2)$.

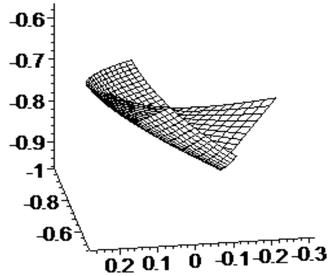


Рис. 8. Фрагментповерхности $r = r^*(u,v)$,
$u \in [-\pi/6, \pi/6], v \in [\pi/2 - \pi/6, \pi/2 + \pi/6]$

Список литературы

1. *Mashke H.* Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Amer. Math. Sos. 1900. Vol. 1:1.

2. *Сабитов И.Х.* Изометрические погружения и вложения плоского листа Мёбиуса в евклидовы пространства // Известия РАН. 2007. Т. 71, №5. С. 197—224.

3. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М.* Аналитические поверхности. М., 2006.

4. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М., 1981.

5. *Чешкова М.А.* О бутылке Клейна // Известия Алтайского университета. Барнаул, 2012. №1/1. С. 130—135.

6. *Чешкова М.А.* Обмотка тора и лист Мёбиуса : сб. тр. 17 региональной конференции по математике. МАК. Барнаул, 2014. С. 37—40.

7. *Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко А. Т.* Введение в топологию. М., 1995.

8. *Арнольд В.И.* Теория катастроф // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления / ВИНИТИ. М., 1985. Т. 5 : Итоги науки и техники. С. 219—227.

M. Cheshkova

Inversion Cross-cap and Roman surface

If along a closed curve on the surface the local orientation of the tangent space changes sign, then the surface is called a one-sided surface. The simplest one-sided surface is the Mobius band. Cross-cap, Roman surface are also one-sided surfaces, The Roman surface, cross-cap are models of the projective plane. We study the inversion of the Roman surface and cross-cap. We constructed in the space model for Cross-cap and Roman surface with a help of mathematical package.

Key words: crossed cap, Möbius band, Roman surface, projective plane, inversion.