Например, для многообразия $\mathfrak{M}_n$ формы связности (13) принимают вид

$$\tilde{\omega}^I=\omega^I-\Pi^{IJ}\omega_J\,,\quad \tilde{\omega}^J_I=\omega^J_I-\Pi^{JK}_I\omega_K\,,$$

причем объект связности $\Pi=\{\Pi^{IJ},\Pi^{JK}_I\}$ определяется фундаментальным объектом a^K_{IJ} многообразия $\mathfrak{M}_n$ и объектом связности Γ :

$$\Pi^{IJ}=\Gamma^{IJ}+\Gamma^{IKL}a^J_{KL}\,,\quad \Pi^{JK}_I=\Gamma^{JK}_I+\Gamma^{JLM}_I\,a^K_{LM}\,,$$

поэтому по охватам объекта Γ из теоремы 3 строятся охваты объекта Π, задающего связность в ассоциированном с многообразием $\mathfrak{M}_n$ расслоении $G(\mathfrak{M}_n)$.

Список литературы

1. Лумисте Ю.Г. Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях. - Уч.зап.Тартуского ун-та, 1965, вып.177, с.6-41.
2. Малаховский В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. - Тр.геометр.семинара, т.2, М., 1969, с.179-206.
3. Близникене И.В. О геометрии секущей поверхности одного класса пространств тензорных опорных элементов с линейчатой базой. - Лит.мат.сб., 1969, т.9, №2, с.233-242.
4. Близникас В.Й. Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов. - Лит.матем.сб., 1966, т.6, №2, с.141-209.
5. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. - Проблемы геометрии, 1979, т.9.
6. Шевченко Ю.И. Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1978, с.124-133.
7. Bortolotti E. Connessioni nelle varietá luogo di spazi. - Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1933, 3, 81-89.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.15 1984

УДК 514.75

Н.М.Шейдорова

О НОРМАЛИЗАЦИИ ДВУХСОСТАВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА.

В n-мерном проективном пространстве P_n строится нормализация по А.П.Нордену двухсоставного распределения $\mathcal{H}^{r}_{m}$ $(r<m<n-1)$. Так названа [2] пара распределений, состоящая из базисного распределения r-мерных плоскостей Π_r (Λ-распределения) и оснащающего распределения m-мерных плоскостей Π_m (M-распределения) с отношением инцидентности их соответствующих элементов в общем центре: $\Pi_r(A_0)\subset\Pi_m(A_0)$.

Индексы принимают следующие значения:

$$I,K=\overline{1,n}\,;\quad \overset{u,v=\overline{r+1,n};}{p,q,r=\overline{1,r}};\quad i,j=\overline{r+1,m};\quad \alpha,\beta=\overline{m+1,n};$$

Оператор ∇ определим формулой, введенной в работе [2].

1. Пусть распределение $\mathcal{H}^{r}_{m}$ отнесено к реперу $\mathcal{R}^0$ [2] нулевого порядка. В репере $\mathcal{R}^0$ дифференциальные уравнения распределения $\mathcal{H}^{r}_{m}$ примут вид:

$$\begin{aligned}&\omega^\alpha_p=\Lambda^\alpha_{pK}\omega^K_0;\quad \nabla\Lambda^\alpha_{pK}=\delta^\alpha_K\omega^0_p+\Lambda^\alpha_{pKI}\omega^I_0;\\&\omega^i_p=M^i_{pK}\omega^K_0;\quad \nabla M^i_{pK}=-\Lambda^\alpha_{pK}\omega^i_\alpha+\delta^i_K\omega^0_p+M^i_{pKI}\omega^I_0;\quad(1)\\&\omega^\alpha_i=A^\alpha_{iK}\omega^K_0;\quad \nabla A^\alpha_{iK}-\Lambda^\alpha_{pK}\omega^p_i+\delta^\alpha_K\omega^0_i+A^\alpha_{iKI}\omega^I_0.\end{aligned}$$

2. Найдем дифференциальные уравнения полей некоторых геометрических объектов распределения $\mathcal{H}^{r}_{m}$ относительно

репера R°. Определим плоскость $\pi_{n-\tau-1}$, не имеющую общих точек с плоскостью Π_{τ}, точками $P_u = A_u + X^{\circ}_u A_{\circ} + X^p_u A_p$. Требование инвариантности плоскости $\pi_{n-\tau-1}$ накладывает следующие условия на величины X°_u, X^p_u:

$$\nabla X^p_i + \omega^p_i = X^p_{i\kappa}\omega^{\kappa}_{\circ}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\nabla X^p_{\alpha} - X^p_i \omega^i_{\alpha} + \omega^p_{\alpha} = X^p_{\alpha\kappa}\omega^{\kappa}_{\circ}, \\ &\nabla X^{\circ}_i + X^p_i \omega^{\circ}_p + \omega^{\circ}_i = X^{\circ}_{i\kappa}\omega^{\kappa}_{\circ}, \\ &\nabla X^{\circ}_{\alpha} + X^p_{\alpha}\omega^{\circ}_p - X^{\circ}_i \omega^i_{\alpha} + \omega^{\circ}_{\alpha} = X^{\circ}_{\alpha\kappa}\omega^{\kappa}_{\circ}. \end{aligned} \tag{4}$$

Квазитензор $\{X^p_{\alpha}, X^p_i\}$ определяет $(n-\tau)$-мерную инвариантную нормаль первого рода двухсоставного распределения $\mathcal{H}^{\tau}_m$. Нормаль второго рода распределения $\mathcal{H}^{\tau}_m$ определим точками $P_q = A_q + X^{\circ}_q A_{\circ}$. Из условия инвариантности нормали следует, что

$$\nabla X^{\circ}_p + \omega^{\circ}_p = X^{\circ}_{p\kappa}\omega^{\kappa}_{\circ}. \tag{5}$$

Квазитензор $\{X^{\circ}_p\}$ определяет $(\tau-1)$-мерную нормаль второго рода двухсоставного распределения $\mathcal{H}^{\tau}_m$.

3. Построим инвариантные внутренние присоединенные к распределению $\mathcal{H}^{\tau}_m$ поля нормалей первого и второго рода двухсоставного распределения $\mathcal{H}^{\tau}_m$.

Допустим, что существует нетривиальный относительный инвариант $J = J(\Lambda^{\alpha}_{pq})$, которым можно охватить обращенный фундаментальный тензор первого порядка V^{pq}_{α}, симметричный по индексам p,q и удовлетворяющий соотношениям

$$V^{pq}_{\alpha}\Lambda^{\beta}_{pq} = \tau\delta^{\beta}_{\alpha}, \quad V^{pq}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{qs} = (n-m)\delta^p_s, \quad V^{pq}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{sq} = (n-m)\delta^p_s,$$

$$\nabla V^{pq}_{\alpha} = V^{pq}_{\alpha\kappa}\omega^{\kappa}_{\circ}.$$

Рассмотрим системы величин:

$$\begin{cases} L^i_{\alpha} = \frac{1}{\tau}V^{pq}_{\alpha}M^i_{pq}, \quad \nabla L^i_{\alpha} + \omega^i_{\alpha} = L^i_{\alpha\kappa}\omega^{\kappa}_{\circ}; \\ L^p_i = \frac{1}{m-n}V^{pq}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{qi}, \quad \nabla L^p_i + \omega^p_i = L^p_{i\kappa}\omega^{\kappa}_{\circ}; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} L_p = -\frac{1}{n-\tau-1}\left(M^i_{pi} + \Lambda^{\alpha}_{p\alpha} + \frac{1}{m-n}\Lambda^{\alpha}_{pq}V^{qs}_{\beta}\Lambda^{\beta}_{s\alpha} + M^i_{pq}L^q_i\right), \\ \qquad \nabla L_p + \omega^{\circ}_p = L_{p\kappa}\omega^{\kappa}_{\circ}; \end{cases} \tag{7}$$

$$L^p_{\alpha} = \frac{1}{m-n}\left(\Lambda^{\beta}_{q\alpha}V^{pq}_{\beta} + L_q V^{pq}_{\alpha}\right); \quad \nabla L^p_{\alpha} + \omega^p_{\alpha} - L^p_i\omega^i_{\alpha} = L^p_{\alpha\kappa}\omega^{\kappa}_{\circ}. \tag{8}$$

Из уравнений (6),(8) видно, что квазитензор $\{L^p_i, L^p_{\alpha}\}$ первого порядка удовлетворяет уравнениям (3),(4) и, следовательно, определяет $(n-\tau)$-мерную плоскость, не имеющую с соответствующим элементом Λ - распределения других общих точек, кроме центра $A_{\circ}$, т.е. инвариантную нормаль первого рода $\mathcal{N}_{n-\tau}$ двухсоставного распределения $\mathcal{H}^{\tau}_m$. Квазитензор $\{L_p\}$(7) первого порядка определяет $(\tau-1)$-мерную плоскость, принадлежащую плоскости Π_{τ} и не проходящую через центр $A_{\circ}$ распределения $\mathcal{H}^{\tau}_m$, т.е. инвариантную нормаль второго рода $\mathcal{N}_{\tau-1}$.

Нормаль $\mathcal{N}_{n-\tau}$ в каждой точке $A_{\circ}$ пересекает плоскость Π_m распределения $\mathcal{H}^{\tau}_m$ по $(m-\tau)$-мерной плоскости $\Pi_{m-\tau}$, которая определяется квазитензором $\{L^p_i\}$ (6) первого порядка.

Итак, в окрестности первого порядка образующего элемента двухсоставного распределения $\mathcal{H}^{\tau}_m$ внутренним инвариантным образом определена нормализация $\mathcal{N}$ по А.П. Нордену распределения $\mathcal{H}^{\tau}_m$.

4. О п р е д е л е н и е. Точку F, принадлежащую некоторому элементу поля геометрического объекта, заданного на двухсоставном распределении $\mathcal{H}^{\tau}_m$, будем называть фокальной точкой этого элемента, соответствующей данному на распределении направлению, если точка F принадлежит и соседнему элементу этого поля, полученному при смещении центра $A_{\circ}$ в этом направлении [1].

Если точка F с координатами $x^{\mathcal{J}}$, принадлежащая плоскости Π_{τ}, является фокальной, то выполняются соотношения:

$$(\delta^u_{\kappa}x^{\circ} + M^u_{p\kappa}x^p)\,\omega^{\kappa}_{\circ} = 0, \quad x^u = 0, \tag{9}$$

где $M^{\alpha}_{p\kappa} \overset{def}{=} \Lambda^{\alpha}_{p\kappa}$.

При смещении центра $A_{\circ}$ вдоль кривых [1], принадлежащих распределению инвариантных нормалей первого рода $\mathcal{N}_{n-\tau}$:

$$\omega^p_{\circ} - L^p_u\,\omega^u_{\circ} = 0, \quad \omega^u_{\circ} = \rho^u\theta, \tag{10}$$

фокальное многообразие принимает вид

$$\left(\delta^u_v x^0 + x^p (M^u_{pv} + M^u_{pq} L^q_v)\right)\varrho^v = 0, \quad x^u = 0. \tag{11}$$

Система (11) допускает нетривиальные решения для ϱ^v, только когда

$$\det\| \delta^u_v x^0 + x^p (M^u_{pv} + \dot{M}^u_{pq} L^q_v)\| = 0, \quad x^u = 0. \tag{12}$$

Уравнения (12) определяют $(\tau-1)$-мерное алгебраическое многообразие $\mathfrak{M}_{\tau-1}(\Lambda, N)$ порядка $(n-\tau)$, принадлежащее линейному элементу Λ-распределения.

5. Распределение $\mathcal{H}^\tau_m$ устанавливает определенное им самим соответствие между нормалями $\mathcal{N}_{n-\tau}$ первого и нормалями $\mathcal{K}_{\tau-1}$ второго рода. Действительно, в плоскости Π_τ определено инвариантное фокальное многообразие $\mathfrak{M}_{\tau-1}(\Lambda,N)$ (12), соответствующее нормали $\mathcal{N}_{n-\tau}$ первого рода двухсоставного распределения $\mathcal{H}^\tau_m$.

Линейная поляра центра A_0 относительно многообразия $\mathfrak{M}_{\tau-1}(\Lambda,N)$ является $(\tau-1)$-мерной нормалью $\mathcal{K}_{\tau-1}$ второго рода распределения $\mathcal{H}^\tau_m$. Такое соответствие нормалей первого и второго рода двухсоставного распределения $\mathcal{H}^\tau_m$ является обобщенным проективитетом Бомпьяни-Пантази [1].

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности I.-Тр. геометр. семинара, ВИНИТИ АН СССР, 1971, 3, с.49-94.

2. Шейдорова Н.М. К геометрии двухсоставных распределений $\mathcal{H}^\tau_m \subset P_n$ - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14. Калининград, 1983, с.111-115.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 15 1984

УДК 514.75

С.В. Ш м е л е в а

КОНГРУЭНЦИИ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК В P_3 С ДВУМЯ ФОКАЛЬНЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются конгруэнции M линейчатых квадрик Q, имеющие две невырождающиеся поверхности, описанные фокальными точками A_0 и A_3 второго порядка [1]. Доказано, что торсы прямолинейных конгруэнций (A_0A_3) и (A_1, A_2), где A_0A_i, A_3A_i-прямолинейные образующие квадрики Q_i $(i=1,2)$, соответствуют. Установлены характеристические признаки соответствия асимптотических линий на поверхностях (A_0) и A_3. Исследованы конгруэнции M, у которых (A_0) и (A_3) образуют пару Годо [2] или являются квадриками.

§1. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

В репере $R=\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ квадрика $Q \in M$ и конгруэнция M задаются соответственно уравнениями:

$$\mathcal{F} \equiv x^1x^2 - x^0x^3 = 0, \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \omega^3_0 = 0, \ \omega^0_3 = 0, \ \omega^j_i = a_i\omega^i - \frac{1}{2}h_i\omega^j, \ \omega^3_i = \omega^j, \\ \omega^0_i = \omega^j_3, \ \omega^i_3 = b^i_k\omega^k, \ \Omega \equiv \omega^0_0 - \omega^1_1 - \omega^2_2 + \omega^3_3 = h_k\omega^k, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$h_i(b^j_j - b^i_i) - h_j b^j_i - 2b^i_j a_i = 0, \tag{1.3}$$

причем $b \equiv b^1_1 b^2_2 - b^2_1 b^1_2 \neq 0$ (1.4)

Здесь и в дальнейшем $\omega^i = \omega^i_0$, ω^β_α $(\alpha, \beta = 0,1,2,3)$ - компоненты инфинитезимальных перемещений репера R, $i,j,k=1,2$,