2. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.

3. *Чакмазян А. В*. Двойственная нормализация // Докл. АН АрмССР. 1959. Т. 28, №4. С. 151—157.

T. Alenina

Dual spaces of affine connection induced by the normalization $\{T_n^i, T_i\}$ of distribution H in the space $\mathrm{M}_{n,n}$

This work is devoted to regular hyperband distribution H in the space of affine-metric connection $\mathrm{M}_{n,n}$.

УДК 514.75

О. О. Белова

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Индуцирование аналога связности Нейфельда на грассмаподобном многообразии центрированных плоскостей

В n-мерном проективном пространстве рассмотрено грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей. Над ним возникает некоторое главное расслоение, в котором задается аналог связности Нейфельда. Доказано, что аналог сильной нормализации Нордена индуцирует данную связность.

Ключевые слова: проективное пространство, грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей, главное расслоение, аналог сильной нормализации Нордена, связность Нейфельда.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ ($I, \ldots = \overline{1, n}$), инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \; dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A, \tag{1}$$

причем формы Пфаффа ω^I, ω_I^J, ω_I удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы *GP(n)* [1]:

$$\begin{gathered} D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \; D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J, \\ D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I. \end{gathered} \tag{2}$$

В пространстве P_n рассмотрим грассманоподобное многообразие $Gr^*(m,n)$ [2] m-мерных центрированных плоскостей L_m^*. Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$ ($a, \ldots = \overline{1, m}$; $\alpha, \ldots = \overline{m+1, n}$), помещая вершины A, A_a на центрированную плоскость $L_m{}^* = [A, A_a]$ и фиксируя центр A. Из выражений (1) следует, что формы ω^a, ω^α, ω_a^α являются главными, а формы ω^α, ω_a^α — базисными. Уравнения грассманоподобного многообразия $Gr^*(m,n)$ центрированных плоскостей имеют вид

$$\omega^a = \Lambda_\alpha^a \omega^\alpha + \Lambda_\alpha^{ab} \omega_b^\alpha,$$

причем компоненты фундаментального объекта $\Lambda = \{\Lambda_\alpha^a, \Lambda_\alpha^{ab}\}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм ω^α, ω_a^α:

$$\Delta\Lambda_\alpha^a + \Lambda_\alpha^{ab}\omega_b + \omega_\alpha^a \equiv 0, \; \Delta\Lambda_\alpha^{ab} \equiv 0. \tag{3}$$

Базисные формы удовлетворяют вытекающим из (2) структурным уравнениям

$$\begin{gathered} D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \Omega^\alpha_\beta + (\Lambda^a_\beta \omega^\beta + \Lambda^{ab}_\beta \omega^\beta_b) \wedge \omega^\alpha_a, \\ D\omega^\alpha_a = \omega^\beta_b \wedge \Omega^{\alpha b}_{\beta a} + \omega^\beta \wedge \Omega^\alpha_{\beta a}, \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} \Omega^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta, \\ \Omega^{\alpha b}_{\beta a} = \delta^b_a \omega^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta \omega^b_a, \\ \Omega^\alpha_{\beta a} = -\delta^\alpha_\beta \omega_a. \end{gathered} \tag{5}$$

Находим внешние дифференциалы от форм (5)

$$\begin{gathered} D\Omega^\alpha_\beta = \Omega^\gamma_\beta \wedge \Omega^\alpha_\gamma + \omega^\gamma \wedge \Omega^\alpha_{\beta\gamma} + \omega^\gamma_a \wedge \Omega^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \\ D\Omega^{\alpha b}_{\beta a} = \Omega^{\gamma b}_{\beta c} \wedge \Omega^{\alpha c}_{\gamma a} + \omega^\gamma \wedge \Omega^{\alpha b}_{\beta a\gamma} + \omega^\gamma_c \wedge \Omega^{\alpha bc}_{\beta a\gamma}, \\ D\Omega^\alpha_{\beta a} = \Omega^\gamma_{\beta b} \wedge \Omega^{\alpha b}_{\gamma a} + \Omega^\gamma_\beta \wedge \Omega^\alpha_{\gamma a} + \omega^\gamma_a \wedge \Theta^\alpha_{\beta\gamma}, \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$\Omega^\alpha_{\beta\gamma} = \Lambda^a_\gamma \Omega^\alpha_{\beta a} - \delta^\alpha_\beta \omega_\gamma - \delta^\alpha_\gamma \omega_\beta, \ \Omega^{\alpha a}_{\beta\gamma} = \Lambda^{ba}_\gamma \Omega^\alpha_{\beta b} - \delta^\alpha_\gamma \omega^a_\beta,$$

$$\Omega^{\alpha b}_{\beta a\gamma} = -\Lambda^b_\gamma \Omega^\alpha_{\beta a} - \delta^b_a \delta^\alpha_\gamma \omega_\beta,$$

$$\Omega^{\alpha bc}_{\beta a\gamma} = -\Lambda^{bc}_\gamma \Omega^\alpha_{\beta a} - \delta^b_a \delta^\alpha_\gamma \omega^c_\beta - \delta^c_a \delta^\alpha_\beta \omega^b_\gamma, \ \Theta^\alpha_{\beta\gamma} = -\delta^\alpha_\beta \omega_\gamma.$$

Над грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей $Gr^*(m,n)$ возникает главное расслоение L (Gr^*) со структурными уравнениями (4), (6), типовым слоем которого является группа Ли L, действующая в касательном пространстве к многообразию Gr^*. В главном расслоении L (Gr^*) зададим аналог связности Нейфельда [3; 4] способом Лаптева — Лумисте.

Введем новые формы

$$\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\beta} = \Omega^{\alpha}_{\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma} - L^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{a},$$

$$\tilde{\Omega}^{\alpha b}_{\beta a} = \Omega^{\alpha b}_{\beta a} - \Gamma^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega^{\gamma} - L^{\alpha bc}_{\beta a\gamma}\omega^{\gamma}_{c}, \tag{7}$$

$$\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\beta a} = \Omega^{\alpha}_{\beta a} - \Pi^{\alpha}_{\beta a\gamma}\omega^{\gamma} - G^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega^{\gamma}_{b}.$$

Рассмотрим дифференциалы форм (7):

$$\begin{aligned}
D\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\beta} &= \tilde{\Omega}^{\gamma}_{\beta}\wedge\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{\gamma}\wedge(\Delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - L^{\alpha a}_{\beta\mu}\Omega^{\mu}_{\gamma a} + \Omega^{\alpha}_{\beta\gamma}) + \\
&+\omega^{\gamma}_{a}\wedge(\Delta L^{\alpha a}_{\beta\gamma} + \Omega^{\alpha a}_{\beta\gamma}) + \Gamma^{\eta}_{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}_{\eta\gamma}\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\mu} + \\
&+(L^{\eta a}_{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}_{\eta\gamma} - \Gamma^{\eta}_{\beta\gamma}L^{\alpha a}_{\eta\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}\Lambda^{a}_{\gamma})\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\mu}_{a} + \\
&+(L^{\eta b}_{\beta\mu}L^{\alpha a}_{\eta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\Lambda^{ab}_{\mu})\omega^{\gamma}_{a}\wedge\omega^{\mu}_{b}, \\
D\tilde{\Omega}^{\alpha b}_{\beta a} &= \tilde{\Omega}^{\gamma b}_{\beta c}\wedge\tilde{\Omega}^{\alpha c}_{\gamma a} + \omega^{\gamma}\wedge(\Delta\Gamma^{\alpha b}_{\beta a\gamma} - L^{\alpha bc}_{\beta a\mu}\Omega^{\mu}_{\gamma c} + \Omega^{\alpha b}_{\beta a\gamma}) + \\
&+\omega^{\gamma}_{c}\wedge(\Delta L^{\alpha bc}_{\beta a\gamma} + \Omega^{\alpha bc}_{\beta a\gamma}) + \Gamma^{\eta b}_{\beta c\mu}\Gamma^{\alpha c}_{\eta a\gamma}\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\mu} + \\
&+(L^{\eta bc}_{\beta e\mu}\Gamma^{\alpha e}_{\eta a\gamma} - \Gamma^{\alpha b}_{\beta a\mu}\Lambda^{c}_{\gamma} - \Gamma^{\eta b}_{\beta e\gamma}L^{\alpha ec}_{\eta a\mu})\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\mu}_{c} + \\
&+(L^{\eta be}_{\beta d\mu}L^{\alpha dc}_{\eta a\gamma} + \Gamma^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\Lambda^{ce}_{\mu})\omega^{\gamma}_{c}\wedge\omega^{\mu}_{e}, \qquad (8)\\
D\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\beta a} &= \tilde{\Omega}^{\gamma}_{\beta b}\wedge\tilde{\Omega}^{\alpha b}_{\gamma a} + \tilde{\Omega}^{\gamma}_{\beta}\wedge\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\gamma a} + \\
&+\omega^{\gamma}\wedge(\Delta\Pi^{\alpha}_{\beta a\gamma} - G^{\alpha b}_{\beta a\mu}\Omega^{\mu}_{\gamma b} - \Gamma^{\alpha b}_{\mu a\gamma}\Omega^{\mu}_{\beta b} + \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\Omega^{\alpha}_{\mu a}) + \\
&+\omega^{\gamma}_{b}\wedge(\Delta G^{\alpha b}_{\beta a\gamma} - L^{\alpha cb}_{\mu a\gamma}\Omega^{\mu}_{\beta c} + L^{\mu b}_{\beta\gamma}\Omega^{\alpha}_{\mu a} + \delta^{b}_{a}\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma}) + \\
&+(\Pi^{\eta}_{\beta b\mu}\Gamma^{\alpha b}_{\eta a\gamma} + \Gamma^{\eta}_{\beta\mu}\Pi^{\alpha}_{\eta a\gamma})\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\mu} + \\
&+(G^{\eta b}_{\beta c\mu}\Gamma^{\alpha c}_{\eta a\gamma} - \Pi^{\alpha}_{\beta a\mu}\Lambda^{b}_{\gamma} - \Pi^{\eta}_{\beta c\gamma}L^{\alpha cb}_{\eta a\mu} - \Gamma^{\eta}_{\beta\gamma}G^{\alpha b}_{\eta a\mu} + \\
&+L^{\eta b}_{\beta\mu}\Pi^{\alpha}_{\eta a\gamma})\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\mu}_{b} + \\
&+(G^{\eta b}_{\beta e\mu}L^{\alpha ec}_{\eta a\gamma} + \Pi^{\alpha}_{\beta a\gamma}\Lambda^{bc}_{\mu} - L^{\eta b}_{\beta\gamma}G^{\alpha c}_{\eta a\mu})\omega^{\gamma}_{b}\wedge\omega^{\mu}_{c}.
\end{aligned}$$

Связность в главном расслоении L (Gr^*) задается с помощью поля объекта связности $Г = \{ Г^{\alpha}_{\beta\gamma}, L^{\alpha a}_{\beta\gamma}, Г^{\alpha b}_{\beta a\gamma}, L^{\alpha bc}_{\beta a\gamma}, П^{\alpha}_{\beta a\gamma}, G^{\alpha b}_{\beta a\gamma} \}$ на базе $Gr^*(m,n)$ уравнениями

$$\Delta Г^{\alpha}_{\beta\gamma} - L^{\alpha a}_{\beta\mu}\Omega^{\mu}_{\gamma a} + \Omega^{\alpha}_{\beta\gamma} = Г^{\alpha}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\mu} + Г^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\mu}_{a},$$

$$\Delta L^{\alpha a}_{\beta\gamma} + \Omega^{\alpha a}_{\beta\gamma} = L^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\mu} + L^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\mu}_{b},$$

$$\Delta Г^{\alpha b}_{\beta a\gamma} - L^{\alpha bc}_{\beta a\mu}\Omega^{\mu}_{\gamma c} + \Omega^{\alpha b}_{\beta a\gamma} = Г^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\mu} + Г^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\mu}_{c},$$

$$\Delta L^{\alpha bc}_{\beta a\gamma} + \Omega^{\alpha bc}_{\beta a\gamma} = L^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\mu} + L^{\alpha bce}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\mu}_{e}, \tag{9}$$

$$\Delta П^{\alpha}_{\beta a\gamma} - G^{\alpha b}_{\beta a\mu}\Omega^{\mu}_{\gamma b} - Г^{\alpha b}_{\mu a\gamma}\Omega^{\mu}_{\beta b} + Г^{\mu}_{\beta\gamma}\Omega^{\alpha}_{\mu a} = П^{\alpha}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\mu} + П^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\mu}_{b},$$

$$\Delta G^{\alpha b}_{\beta a\gamma} - L^{\alpha cb}_{\mu a\gamma}\Omega^{\mu}_{\beta c} + L^{\mu b}_{\beta\gamma}\Omega^{\alpha}_{\mu a} + \delta^{b}_{a}\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma} = G^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\mu} + G^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}\omega^{\mu}_{c},$$

где оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta Г^{\alpha b}_{\beta a\gamma} = dГ^{\alpha b}_{\beta a\gamma} + Г^{\alpha c}_{\beta a\gamma}\omega^{b}_{c} + Г^{\mu b}_{\beta a\gamma}\omega^{\alpha}_{\mu} -$$

$$-Г^{\alpha b}_{\beta a\mu}\omega^{\mu}_{\gamma} - Г^{\alpha b}_{\mu a\gamma}\omega^{\mu}_{\beta} - Г^{\alpha b}_{\beta d\gamma}\omega^{d}_{a}.$$

Осуществим аналог сильной нормализации Нордена [5] данного многообразия полями следующих геометрических образов: (*n-m-1*)-плоскостью P_{n-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью L^*_m, и (*m-1*)-плоскостью P_{m-1}, принадлежащей плоскости L^*_m и не проходящей через ее центр. Плоскость P_{n-m-1} зададим совокупностью точек $B_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A$, а плоскость P_{m-1} — точками $B_a = A_a + \lambda_a A$. Находя дифференциалы базисных точек оснащающих плоскостей и требуя относительную инвариантность этих плоскостей, получим

$$\Delta\lambda^a_\alpha + \omega^a_\alpha \equiv 0, \ \Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha \equiv 0, \ \Delta\lambda_a + \omega_a \equiv 0. \tag{10}$$

Аналог сильной нормализации Нордена, задаваемой полем квазитензора $\lambda = \{\lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha, \lambda_a\}$ на многообразии $Gr^*(m,n)$, позволяет охватить компоненты объекта связности Γ

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = -\delta_\gamma^\alpha \lambda_\beta - \delta_\beta^\alpha \eta_\gamma ,$$

$$L_{\beta\gamma}^{\alpha a} = -\delta_\gamma^\alpha \lambda_\beta^a - \delta_\beta^\alpha \Lambda_\gamma^{ba} \lambda_b ,$$

$$\Gamma_{\beta a\gamma}^{\alpha b} = \delta_\beta^\alpha \mu_\gamma^b \lambda_a - \delta_a^b \delta_\gamma^\alpha \lambda_\beta ,$$

$$L_{\beta a\gamma}^{\alpha bc} = \delta_\beta^\alpha \Lambda_\gamma^{bc} \lambda_a - \delta_a^b \delta_\gamma^\alpha \lambda_\beta^c - \delta_\beta^\alpha \delta_a^c \lambda_\gamma^b , \tag{11}$$

$$\Pi_{\beta a\gamma}^{\alpha} = \delta_\beta^\alpha \mu_\gamma^b \lambda_a \lambda_b ,$$

$$G_{\beta a\gamma}^{\alpha b} = \delta_\beta^\alpha \Lambda_\gamma^{cb} \lambda_a \lambda_c - \delta_\beta^\alpha \delta_a^b \lambda_\gamma ,$$

где $\mu_\alpha^a = \Lambda_\alpha^a - \lambda_\alpha^a$, $\eta_\alpha = \lambda_\alpha + \mu_\alpha^a \lambda_a$. Функции (11) в силу сравнений (3) и (10) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (9). Таким образом, справедлива

Теорема. *Аналог сильной нормализации Нордена грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей индуцирует аналог связности Нейфельда в ассоциированном расслоении L (Gr^*).*

Список литературы

1. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

2. *Белова О.О.* Связность в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. 2006. №5 (52). С. 18—20.

3. *Норден А.П.* Проективные метрики на грассмановых многообразиях // Изв. вузов. Матем., 1981. №11. С. 80—83.

4. *Малахальцев М.А.* О внутренней геометрии связности Нейфельда // Там же. 1986. №2. С. 67—69.

5. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

O. Belova

Inducing an analog of Neifeld's connection on the Grassman-like manifold of centered planes

Grassman-like manifold $Gr^{*}(m,n)$ of centered m-planes is considered in the projective space P_n. Principal fiber bundle is arised above it. Analog of Neifeld's connection is given in this fibering. It is proved, that the analog of Norden's normalization of Grassman-like manifold of centered planes induces this connection.

УДК 514.76

И. М. Бурлаков
Московский педагогический государственный университет

Геометрические структуры на линейных алгебрах

Рассматриваются пространства с фундаментальной формой произвольной степени. Такие пространства можно реализовать на линейных алгебрах, если в качестве фундаментальной формы брать детерминант произвольного элемента или произведения нескольких элементов, если такое произведение дает форму со значениями в основном поле.

Ключевые слова: алгебры, геометрические структуры, группа движений, почти евклидовы пространства.

Среди геометрических структур, определяемых на основе линейного пространства, можно выделить один класс, который представляется естественным обобщением евклидовых пространств. Геометрия пространств из этого класса опреде-