УДК 514.75

Ю.И. Ш е в ч е н к о

(*Калининградский государственный университет*)

О СТРУКТУРНЫХ УРАВНЕНИЯХ ПРОЕКТИВНОЙ ГРУППЫ

Исследованы структурные уравнения проективной группы в линейной и проективной записях. Показано, что линейная запись неудобна для выделения подгрупп проективной группы, а проективная запись лишена указанного недостатка. Для этого потребовалось развить понятие рассеченного пространства Нордена, а именно, рассмотреть следующие специальные проективные пространства: центропроективное, коцентропроективное, m-проективное, парапроективное, разрезанное и полуразрезанное парапроективное.

С помощью проективной записи легко доказывается, что проективное пространство, представляемое как пространство точек, является голономным гладким (точнее, центропроективным) многообразием. Проективное пространство, рассматриваемое как пространство гиперплоскостей, есть голономное гладкое (точнее, аффинное) многообразие. Структурные уравнения проективной группы в проективной записи хорошо подходят для описания расслоений центропроективных и линейных реперов над проективным пространством.

Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n, которое можно представлять как факторпространство $L_{n+1}/\sim$, где L_{n+1} - линейное пространство размерности n+1, а отношение эквивалентности ~ относит в один класс ненулевые коллинеарные векторы, т.е.

$$\overline{A} \sim \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A} = \lambda \overline{B} \ \ (\overline{A}, \overline{B} \in L_{n+1},\ \lambda \neq 0).$$

Значит, точкой A проективного пространства P_n является класс эквивалентности $\{\overline{A}\}$, порожденный вектором $\overline{A}$. Часто говорят о геометрической точке A и аналитической точке $\overline{A}$, представляющей геометрическую точку A. Мы не будем пользоваться этой терминологией и писать черточку над аналитическими точками, так как в формулах используются аналитические точки, а в рассуждениях – соответствующие геометрические точки. Не будем использовать и так называемую единичную точку.

Отнесем проективное пространство P_n к подвижному реперу $R = \{A_{I'}\}$, причем индексы принимают n+1 значений: $I', J', K' = \overline{0, n}$. Деривационные формулы (см., например, [1,с.22; 3,с.354; 4,с.18; 6,с.65; 11,с.12]) вершин репера R имеют вид:

$$dA_{I'} = \omega_{I'}^{J'} A_{J'}, \tag{1}$$

где d - символ обычного дифференцирования в пространстве P_n, $\omega_{I'}^{J'}$ - линейные дифференциальные формы. Продифференцируем уравнения (1) внешним образом

$$D(dA_{I'}) = D\omega_{I'}^{J'} A_{J'} + dA_{J'} \wedge \omega_{I'}^{J'},$$

где D – символ внешнего дифференцирования. В проективном пространстве P_n дифференциалы $dA_{I'}$ полные, т.е. $D(dA_{I'}) = 0$, поэтому с использованием уравнений (1) имеем

$$(D\omega_{I'}^{J'} + \omega_{K'}^{J'} \wedge \omega_{I'}^{K'})A_{J'} = 0,$$

откуда в силу линейной независимости базисных точек $A_{J'}$ и антикоммутативности внешнего умножения получаются структурные уравнения Картана

$$D\omega_{I'}^{J'} = \omega_{I'}^{K'} \wedge \omega_{K'}^{J'}. \tag{2}$$

Это структурные уравнения линейной группы $GL(n+1)$, действующей эффективно в линейном пространстве L_{n+1} и неэффективно в проективном пространстве P_n. Из линейной группы $GL(n+1)$ выделяют эффективно действующую в пространстве P_n специальную линейную группу SGL(n+1) с помощью условия (см., например, [1,с.22])

$$\omega_{I'}^{I'} = 0. \tag{3}$$

Размерности линейной и специальной линейной групп равны числу независимых форм, входящих в структурные уравнения (2):

$$\dim GL(n+1) = (n+1)^2, \ \dim SGL(n+1) = n(n+2).$$

Структурные уравнения (2,3) специальной линейной группы SGL(n+1) называют (см., например, [1,с.22; 6,с.66]) уравнениями структуры проективного пространства P_n.

Замечание . Равенство (3) по внешней аналогии с условием эквиаффинности называют условием эквипроективности (см., например, [3,с.355; 6,с.65]). Лучше называть его условием проективности, так как оно выделяет специальную линейную группу SGL(n+1), изоморфную проективной группе GP(n), действующей эффективно в пространстве P_n. Отметим, что эквипроективность Трейси Томас [13] имеет другое значение.

Покажем, что аналитический аппарат (1-3) неудобен для выделения подгрупп. Во-первых, проективное пространство P_n является обобщением аффинного пространства A_n, но уравнения структуры аффинного пространства, иначе говоря, структурные уравнения действующей в аффинном пространстве A_n аффинной группы GA(n)

$$D\overline{\omega}^I = \overline{\omega}^J \wedge \overline{\omega}_J^I, \quad D\overline{\omega}_I^J = \overline{\omega}_I^K \wedge \overline{\omega}_K^J \quad (I, J, K, L = \overline{1,n}), \tag{4}$$

непосредственно не получаются из структурных уравнений (2,3) специальной линейной группы SGL(n+1), действующей в пространстве P_n. Отметим, что размерность аффинной группы dim GA(n)=n(n+1).

Во-вторых, рассмотрим подпространство P_m проективного пространства P_n. Произведем разбиение значений индексов

$$I' = (i', \alpha); \quad i', j', k' = \overline{0, m}; \quad \alpha = \overline{m+1, n}\,.$$

Поместим вершины $A_{i'}$ репера $R = \{A_{i'}, A_\alpha\}$ в подпространство P_m. Запишем для них деривационные формулы (1)

$$dA_{i'} = \omega_{i'}^{j'} A_{j'} + \omega_{i'}^{\alpha} A_\alpha, \tag{5}$$

откуда вытекают уравнения стационарности подпространства P_m

$$\omega_{i'}^{\alpha} = 0. \tag{6}$$

Формулы (5) упрощаются

$$\delta A_{i'} = \pi_{i'}^{j'} A_{j'}, \tag{7}$$

где δ - дифференцирование при фиксации подпространства P_m, $\pi = \omega \,\big|_{(6)}$.

Напишем структурные уравнения (2) для форм $\omega_{i'}^{j'}$

$$D\omega_{i'}^{j'} = \omega_{i'}^{k'} \wedge \omega_{k'}^{j'} + \omega_{i'}^{\alpha} \wedge \omega_{\alpha}^{j'}.$$

Используя уравнения (6), получим

$$D\pi_{i'}^{j'} = \pi_{i'}^{k'} \wedge \pi_{k'}^{j'}. \tag{8}$$

Из условия (3) имеем $\omega_{i'}^{i'} + \omega_{\alpha}^{\alpha} = 0$, откуда

$$\pi_{i'}^{i'} = -\pi_{\alpha}^{\alpha} \neq 0. \tag{9}$$

Таким образом, деривационные формулы (7) и структурные уравнения (8) для подпространства P_m аналогичны формулам (1) и уравнениям (2) для пространства P_n, но условия (9) не аналогичны равенствам (3). Результат сформулируем в двух равносильных утверждениях.

Теорема 1. *При ограничении аналитического аппарата (1-3) проективного пространства* P_n *на подпространство* P_m *получается другой аналитический аппарат (7-9).*

Теорема 2. *Если в проективном пространстве* P_n *действует специальная линейная группа SGL(n+1), то в подпространстве* P_m *действует линейная группа GL(m+1).*

Построим аналитический аппарат, лишенный указанных недостатков. Воспользуемся деривационными формулами (1) и структурными уравнениями (2) в предположении, что условие проективности (3) не выполняется. Введем новые формы [3,с.354; 4,с.10,18; 6,с.66; 111,с.12]

$$\theta_{J'}^{I'} = \omega_{J'}^{I'} - \delta_{J'}^{I'} \omega_0^0. \tag{10}$$

Выделим значение 0 индекса $J' = \{0, J\}$. Формы (10) запишем подробнее

$$\theta^I = \omega_0^I, \quad \theta_J^I = \omega_J^I - \delta_J^I \omega_0^0, \quad \theta_I = \omega_I^0 \;\; (\theta_0^0 = 0), \tag{11}$$

где опущен нулик у форм θ_0^I, θ_I^0. Эти формы независимы, их число равно n(n+2), поэтому они являются базисными формами проективной группы GP(n), действующей эффективно в проективном пространстве P_n.

Выведем структурные уравнения для базисных форм (11) проективной группы GP(n). Дифференцируя их внешним образом с использованием структурных уравнений (2), получим

$$D\theta^I = \omega \wedge \theta^I + \theta^J \wedge \omega_J^I, \quad D\theta_I = \omega_I^J \wedge \theta_J + \theta_I \wedge \omega$$

$$D\theta_J^I = \theta_J \wedge \theta^I + \omega_J^K \wedge \omega_K^I - \delta_J^I \theta^K \wedge \theta_K,$$

где $\omega = \omega_0^0$. Подставляя выражения форм ω_J^I из обозначений (11), найдем

$$D\theta^I = \theta^J \wedge \theta_J^I, \tag{12}$$

$$D\theta_J^I = \theta_J \wedge \theta^I + \theta_J^K \wedge \theta_K^I - \delta_J^I \theta^K \wedge \theta_K, \tag{13}$$

$$D\theta_I = \theta_I^J \wedge \theta_J. \tag{14}$$

Это структурные уравнения проективной группы GP(n). Они используются реже [2,с.173; 4,с.10,18; 6,с.66; 11,с.12; 12,с.121], чем структурные уравнения (2,3) специальной линейной группы SGL(n+1), но более удобны.

Запишем деривационные формулы (1) подробнее

$$dA = \omega A + \omega_0^I A_I, \quad dA_I = \omega_I^0 A + \omega_I^J A_J,$$

где $A = A_0$. Внесем в них базисные формы (11) проективной группы GP(n)

$$dA = \omega A + \theta^I A_I, \quad dA_I = \omega A_I + \theta_I^J A_J + \theta_I A. \tag{15}$$

Это деривационные формулы подвижного репера $R = \{A, A_I\}$ проективного пространства P_n. Отметим, что в формулы (15) наряду с формами (11) входит форма ω, но слагаемые с ней не играют существенной роли в проективном пространстве P_n.

Развивая понятие рассеченного пространства [5], для специальных проективных пространств введем названия и обозначения, часть которых будем использовать и для аффинных пространств.

Определение. *Проективное пространство* P_n *назовем : 1) центропроективным* P_n^*, *если в нем фиксирована точка* P_0; *2) m-проективным* P_n^m, *если в нем фиксировано m-мерное подпространство* P_m *(*$P_n^0 = P_n^*$*); 3) коцентропроективным* ${}^*P_n = P_n^{n-1}$, *если в нем фиксирована гиперплоскость* P_{n-1}; *4) парапроективным* ${}^*P_n^*$, *если в нем фиксирована пара (*P_0, P_{n-1}*), где* $P_0 \notin P_{n-1}$; *5) разрезанным, если фиксированная фигура удалена:* $P_n^{\varnothing} = P_n^* \setminus P_0$, ${}^{\varnothing}P_n = {}^*P_n \setminus P_{n-1}$, ${}^{\varnothing}P_n^{\varnothing} = P_n \setminus (P_0 \cup P_{n-1})$; *6) полуразрезанным парапроективным , если удалена лишь одна фигура фиксированной пары:* ${}^*P_n^{\varnothing} = {}^*P_n^* \setminus P_0$, ${}^{\varnothing}P_n^* = {}^*P_n^* \setminus P_{n-1}$.

Покажем достоинства аналитического аппарата (12-15). Рассмотрим коцентропроективное пространство ${}^*P_n$. Расположим на гиперплоскости P_{n-1} вершины A_I подвижного репера R, тогда из второй формулы (15) найдем уравнения стационарности гиперплоскости P_{n-1}

$$\theta_I = 0. \tag{16}$$

Из структурных уравнений (14) видно, что эта система дифференциальных уравнений вполне интегрируема. Учитывая уравнения (16) в структурных уравнениях (12,13), получим уравнения (4), в которых $\overline{\omega} = \theta \mid_{(16)}$.

Теорема 3. *Структурные уравнения (12-14) проективной группы GP(n) обобщают структурные уравнения (4) аффинной группы GA(n).*

Теорема 4. *Коцентропроективное пространство* ${}^*P_n$ *является расширенным аффинным пространством, в котором* P_{n-1} *играет роль несобственной гиперплоскости. Разрезанное коцентропроективное пространство* ${}^{\varnothing}P_n$ *есть аффинное пространство* A_n*, т.е.* $A_n = {}^{\varnothing}P_n$.

Рассмотрим центропроективное пространство P_n^*. Поместим в точку P_0 вершину A подвижного репера R, тогда из первой формулы (15) найдем уравнения стационарности точки P_0

$$\theta^I = 0. \tag{17}$$

Из структурных уравнений (12) видно, что эта система дифференциальных уравнений вполне интегрируема. Учитывая уравнения (17) в структурных уравнениях (13,14), получим

$$D\overline{\theta}_J^I = \overline{\theta}_J^K \wedge \overline{\theta}_K^I, \quad D\overline{\theta}_I = \overline{\theta}_I^J \wedge \overline{\theta}_J, \tag{18}$$

где $\overline{\theta} = \theta \mid_{(17)}$. Это структурные уравнения центропроективной или коаффинной группы $GA'(n)$ с размерностью $\dim GA'(n)$=n(n+1).

Теорема 5. *Структурные уравнения (12-14) проективной группы GP(n) обобщают структурные уравнения (18) коаффинной группы* $GA'(n)$.

Теорема 6. *Центропроективное пространство* P_n^* *является расширенным коаффинным пространством, в котором* P_0 *играет роль несобственной точки. Разрезанное центропроективное пространство* $P_n^{\varnothing}$ *есть коаффинное пространство* A'_n*, т.е.* $A'_n = P_n^{\varnothing}$.

Рассмотрим парапроективное пространство ${}^*P_n^*$. Совместив вершину A подвижного репера R с точкой P_0 и поместив вершины A_I на гиперплоскость P_{n-1}, получим уравнения стационарности (16,17) пары (P_0, P_{n-1}). Учитывая эти уравнения в структурных уравнениях (13), найдем

$$D\overline{\overline{\theta}}_J^I = \overline{\overline{\theta}}_J^K \wedge \overline{\overline{\theta}}_K^I, \tag{19}$$

где $\overline{\overline{\theta}} = \theta \mid_{(16,17)}$. Это структурные уравнения линейной группы GL(n) с размерностью dim GL(n)=n^2.

Теорема 7. *Структурные уравнения (12-14) проективной группы GP(n) обобщают структурные уравнения (19) линейной группы GL(n).*

Теорема 8. *Парапроективное пространство* $^{*}P_n^{*}$ *является расширением разрезанного центроаффинного пространства* $A_n^{\varnothing}$*, для которого* P_0 *и* P_{n-1} *играют роли несобственных точки и гиперплоскости. Разрезанное парапроективное пространство* $^{\varnothing}P_n^{\varnothing}$ *есть разрезанное центроаффинное пространство* $A_n^{\varnothing}$*, т.е.* $A_n^{\varnothing} = {}^{\varnothing}P_n^{\varnothing}$*. Полуразрезанное парапроективное пространство* $^{\varnothing}P_n^{*}$ *совпадает с центроаффинным пространством* A_n^{*}*, т.е.* $A_n^{*} = {}^{\varnothing}P_n^{*}$.

Отметим, что линейная группа GL(n) действует как в центроаффинном пространстве A_n^{*}, так и в линейном пространстве L_n векторов пространства A_n^{*}. Подгруппы проективной группы GP(n) связаны отношениями включения

$$GL(n) \subset GA(n) \subset GP(n)$$

$$GL(n) \subset GA'(n) \subset GP(n).$$

Рассмотрим m-проективное n-пространство P_n^m. Произведем разбиение значений индексов

$$I = (i, \alpha); \quad i, j, k = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{m+1, n}.$$

Поместим вершины A, A_i репера R в подпространство P_m. Запишем для них деривационные формулы (15)

$$dA = \omega A + \theta^i A_i + \theta^\alpha A_\alpha, \quad dA_i = \omega A_i + \theta_i^j A_j + \theta_i^\alpha A_\alpha + \theta_i A, \tag{20}$$

откуда вытекают уравнения стационарности подпространства P_m

$$\theta^\alpha = 0, \quad \theta_i^\alpha = 0. \tag{21}$$

Формулы (20) упрощаются

$$\delta A = \pi A + \nu^i A_i, \quad \delta A_i = \pi A_i + \nu_i^j A_j + \nu_i A, \tag{22}$$

где $\nu = \theta \,\big|_{(21)}$. Запишем структурные уравнения (12-14) для форм $\theta^i, \theta_j^i, \theta_i$

$$D\theta^i = \theta^j \wedge \theta_j^i + \theta^\alpha \wedge \theta_\alpha^i, \; D\theta_i = \theta_i^j \wedge \theta_j + \theta_i^\alpha \wedge \theta_\alpha,$$

$$D\theta_j^i = \theta_j \wedge \theta^i + \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \theta_j^\alpha \wedge \theta_\alpha^i - \delta_j^i(\theta^k \wedge \theta_k + \theta^\alpha \wedge \theta_\alpha),$$

Используя условия (21), получим

$$\begin{aligned} D\nu^i &= \nu^j \wedge \nu_j^i, \quad D\nu_i = \nu_i^j \wedge \nu_j, \\ D\nu_j^i &= \nu_j \wedge \nu^i + \nu_j^k \wedge \nu_K^i - \delta_j^i \nu^k \wedge \nu_k. \end{aligned} \tag{23}$$

Это структурные уравнения проективной группы GP(m)⊂GP(n) с размерностью dimGP(m)=m(m+2), действующей в подпространстве P_m.

Таким образом, деривационные формулы (22) и структурные уравнения (23) для подпространства P_m аналогичны формулам (15) и уравнениям (12-14) для пространства P_n.

Теорема 9. *При ограничении аналитического аппарата (12-15) проективного пространства* P_n *на подпространство* P_m *получается аналогичный аналитический аппарат (22,23).*

Формы θ^I являются структурными формами проективного пространства P_n, так как при $\theta^I=0$ фиксируется точка $A \in P_n$, поэтому уравнения (12) являются структурными уравнениями проективного пространства P_n, рассматриваемого как гладкое многообразие точек. Уравнения (13), являющиеся продолжениями структурных уравнений (12), запишем в виде:

$$D\theta_J^I = \theta_J^K \wedge \theta_K^I + \theta^K \wedge \theta_{JK}^I, \tag{24}$$

где

$$\theta_{JK}^I = -\delta_J^I \theta_K - \delta_K^I \theta_J \tag{25}$$

- симметричные по нижним индексам формы. С помощью уравнений (14) дифференцируем формы θ_{JK}^I внешним образом

$$D\theta_{JK}^I = \theta_K^L \wedge (-\delta_J^I \theta_L) + \theta_J^L \wedge (-\delta_K^I \theta_L).$$

Внесем в них формы (25)

$$D\theta_{JK}^I = \theta_{JK}^L \wedge \theta_L^I - \theta_{LK}^I \wedge \theta_J^L - \theta_{JL}^I \wedge \theta_K^L.$$

Можно считать, что продолжения форм θ_{JK}^I - формы θ_{JKL}^I равны нулю, поэтому симметричны при перестановках нижних индексов и т.д.

Теорема 10. *Проективное пространство* P_n*, рассматриваемое обычно как пространство точек – многообразие Грассмана* Gr(0,n)*, является голономным гладким (точнее, центропроективным, или коаффинным) многообразием [7-10].*

В силу двойственности структурных уравнений (12-14) имеет место

Теорема 11. *Проективное пространство* P_n*, рассматриваемое как пространство гиперплоскостей – многообразие Грассмана Gr(n-1,n), является голономным гладким (точнее, аффинным) многообразием.*

Вывод. Структурные уравнения (12-14) проективной группы GP(n) подходят для описания расслоений. Они показывают, что над проективным пространством P_n имеется расслоение центропроективных (коаффинных) реперов $C(P_n)$- главное расслоение с типовым слоем – центропроективной (коаффинной) группой $C = GA'(n)$, действующей в центропроективном пространстве P_n^*, возникающем при фиксации точки $A \in P_n$. Из структурных уравнений (12,24) видно, что проективное пространство P_n служит базой расслоения линейных реперов $L_{n^2}(P_n)$, типовым слоем которого является линейная группа $L_{n^2} = GL(n)$, действующая в пучке прямых, называемых направлениями, с центром $A \in P_n$.

Работа поддержана грантом Минобразования РФ (СПб КЦ).

Библиографический список

1. *Акивис М.А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977. 84 с.

2. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986. 224 с.

3. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. о-ва. 1953. Т.2.С.275-382.

4. *Лумисте Ю.Г.* Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях // Учен. зап. Тартуск. ун-та. 1965. Вып.177.С.6-42.

5 *Норден А.П.* Теория композиций // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т.10. С.117-145.

6 *Столяров А.В.* Системы уравнений Пфаффа в инволюции. Классические пространства. Чебоксары, 1998.132 с.

7. *Шевченко Ю.И.* Связности голономных и неголономных дифференцируемых многообразий //Диф. геом. многообр. фигур.Калининград, 1994. N25. С.110-121.

8. *Шевченко Ю.И.* Связности голономных и неголономных центропроективных многообразий // Там же. 1996. N27. С.122-135.

9. *Шевченко Ю.И.* Линейные связности голономного и неголономного гладких многообразий // Тр. геом. семинара. Казань, 1997. N23. С. 175-186.

10. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998. 83 с.

11. *Чакмазян А.В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий. Ереван, 1990. 116 с.

12. *Cartan E.* Lecons sur la thérie des espaces a connexion projective. Paris, 1937. 308 p.

13. *Thomas T.Y.* On the projective and equi- projective geometries of paths // Proc. Nat. Acad. Sc. 1925. Vol.11. N4. P. 199-203.

Yu.I. S h e v c h e n k o

ON STRUCTURE EQUATIONS OF PROJECTIVE GROUP

Structure equations of projective group in linear and projective record are investigated. It is known, that linear recording is inconvenient for singling out of subgroups of the projective group, and projective recording has no indicated defect. For that it is necessary to develope Norden split space notion, that is to consider following special projective spaces: centerprojective, cocenterprojective, m-projective, pairprojective, cut and semicut paraprojective.

By means of projective recording it is easy proved, that projective space, represented as point space, is holonomic smooth (exactly, centerprojective) manifold. Projective space, considered as the space of hyperplanes, is holonomic smooth (exactly, affine) manifold. Structure equations of projective group in the projective recording fits very well for describing of bundles of centerprojective and linear frames over rprojective space.