9. *Benzoni-Gavage S.* Stability of semi-discrete shock profiles by means of an Evans function in infinite dimensions // J. Dynam. Differential Equations. 2002. 14(3). P. 613—674.

10. *Coombes S., Owen M. R.* Evans functions for integral neural field equations with Heaviside firing rate function // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2004. 3 (4). P. 574—600.

11. *Gesztesy F., Latushkin Y., Makarov K. A.* Evans functions, Jost functions, and Fredholm determinants // Arch. Ration. Mech. Anal. 2007. 186 (3). P. 361—421.

12. *Deng J., Nii S.* An infinite-dimensional Evans function theory for elliptic boundary value problems // J. Differential Equations. 2008. 244 (4). P. 753—765.

Об авторе

Валериан Артемович Юров — асп., Колумбийский университет, Миссури, США, e-mail: vayt37@mail.missouri.edu

Author

Valerian Yurov — PhD Student, Columbia University, Missouri, USA, e-mail: vayt37@mail.missouri.edu

УДК 517.956

А. А. Юрова

ДИНАМИКА ЛОКАЛИЗОВАННОГО ИМПУЛЬСА, ОПИСЫВАЕМОГО УРАВНЕНИЕМ ДЭВИ — СТЮАРТСОНА II

Изучен класс точных локализованных решений уравнения Дэви — Стюартсона II типа; показано, что с течением времени такие решения теряют пространственную локализацию с характерным временным масштабом, совпадающим с характерным пространственным масштабом начальной локализации. Потеря локализации выражается в появлении резонансных пиков, число которых определяется характером поведения опорной функции на бесконечности. В частности, экспоненциально локализованные возмущения распадаются на бесконечное число резонансов.

A class of spatially localized solutions of Davey — Stewartson II equation is examined; it is shown that such solutions tend to lose the locality properties with time scale corresponding to a characteristic space scale of initial localization. The locality loss manifests itself with emergence of resonance spikes, whose total number is determined by the asymptotic behavior of support function on infinity. In particular, the exponentially localized perturbations split into an infinite number of the resonances.

Ключевые слова: уравнение Дэви — Стюартсона, преобразование Дарбу, солитоны, интегрируемые системы, пары Лакса.

Key words: Davey — Stewartson equation, Darboux transform, solitons, integrable systems, Lax pairs.

Проблема построения локализованных двумерных солитонов является важнейшей задачей теории нелинейных интегрируемых двумерных эволюционных уравнений. Как правило, такие солитоны имеют незамкнутые линии уровня либо же являются рациональными структурами («лампами»). Исключение представляет уравнение Дэви — Стюартсона I, допускающее экспоненциально локализованные солитоны (дромионы), впервые описанные в 90-х годах XX века в работах Бойти, Леона, Пемпинелли, Салля, Юрова и Лебле [1—6]. Исследования показали, что поведение дромионов значительно сложнее, чем поведение обычных (одномерных) солитонов: дромионы не только сталкиваются с характерным фазовым сдвигом, но также могут аннигилировать, рождаться и образовывать связанные мультидромионные комплексы. Поиски подобных решений для уравнения Дэви — Стюартсона II

$$iu_t + u_{xx} - u_{yy} + 2|u|^2 u + Qu = 0, Q_{xx} + Q_{yy} = -4\left(|u|^2\right)_{xx}$$

не увенчались успехом; в частности, изучение обратной задачи рассеяния продемонстрировало существенно несолитонное поведение решений.

В данной работе мы воспользуемся преобразованием Дарбу с целью построения решений уравнений Дэви — Стюартсона II типа (ДС-II) в некоторый момент времени (принятый в дальнейшем за нуль), которые лежат в классе рационально или экспоненциально локализованных структур на плоскости.

Как известно, уравнения Дэви — Стюартсона I типа обладают локализованными решениями. Весьма важный подкласс таких решений составляют так называемые дромионы: решения, при определенном выборе параметров ведущие себя подобно одномерным солитонам при столкновениях. Для уравнений ДС-II подобные решения не обнаружены. Известны стационарные, рационально локализованные структуры, так называемые лампы и мультилампы [1; 2]. В работе [3] показано, что одноламповое решение неустойчиво относительно малых возмущений. Оказывается, после возмущения солитона (лампа) данные рассеяния приобретают бессолитонную структуру: исчезает солитонная (дискретная) часть данных рассеяния, что связано с неустойчивостью полюса решения задачи рассеяния при слабом возмущении потенциала.

Как будет показано ниже, можно получить богатое семейство точных нестационарных и несингулярных решений уравнений ДС-II, локализованных в начальный момент времени, причем с течением времени свойство «быть локализованным» исчезает: на плоскости возникает конечное (если начальное возмущение затухает при $x^2 + y^2 \to \infty$ по степенному закону) или бесконечное (если начальное возмущение затухает по показательному закону) число «резонансов», то есть точек, в которых амплитуда растет со временем. Кроме того, мы предъявим точное решение уравнений ДС-II, представляющее собой солитон на фоне плоской волны. В работе [4] была получена удобная формула, позволяющая размножать решения уравнений ДС-II:

$$u_1 = u - 2i\frac{\psi_{1,x}\psi_2 - \psi_{2,x}\psi_1}{|\psi_1|^2 - \kappa|\psi_2|^2}, \tag{1}$$

где u — затравочное решение уравнений ДС; $\psi_{1,2}$ — решения пары Лакса. Из формулы (1) следует, что регулярные решения обычны для $k = -1$, а при $k = 1$ следует ожидать сингулярных решений. Выберем $u = 0$. Тогда динамические уравнения для $\psi_{1,2}$ принимают вид

$$\psi_{k,t} = 2i\psi_{k,xx},\ \psi_k = \psi_k(t,\ z) \tag{2}$$

с $k = 1, 2$, $z = x+iy$. Пусть $\psi_k = \mu_k z+\nu_k$, где μ_k и ν_k — комплексные константы, удовлетворяющие условию

$$\begin{vmatrix} \mu_2 & \mu_1 \\ \nu_2 & \nu_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если подставить эти функции в формулу (1) то получим однолamповое решение. Воспользуемся полученными формулами и построим нестационарные решения, которые при $t = 0$ локализованы всюду на плоскости. Пусть $\psi_1 = \psi(t,\ z)$ решение (2), а $\psi_2 = i\overline{v} = const.$ Тогда из формулы (1) имеем

$$u_1 = \frac{2\overline{v}\psi_x}{\left|\psi\right|^2 + \left|v\right|}. \tag{3}$$

Похожее соотношение было получено ранее с использованием преобразований Беклунда. Пусть $\psi(0,z)=\psi_0(z)$. Функцию ψ_0 надо выбрать такой, чтобы при подстановке в соотношение (3) получалось выражение $u_0(z) = u(0,z)$, локализованное на плоскости. Затем следует решить уравнение (2) с начальным условием ψ_0. Найденная функция $\psi(t,z)$ определяет решение уравнений ДС-II, которое локализовано при $t = 0$.

Для получения рациональных начальных возмущений можно выбрать

$$\psi_{0,N} = z^N + \mu,$$

где N — натуральное число; μ — комплексная постоянная. Решая уравнение (2), находим, что

$$\psi_N(t,z) = z^N + \mu + Q_N(t,z),\ Q_N = \sum_{k=1}^{m} a_k t^k z^{N-2k},$$

где $m = N/2$, если N — четно; $m = (N - 1)/2$, если N нечетно; a_k — некоторые коэффициенты. Решение (3) выражается в виде отношения двух полиномов и затухает при $|z|\to\infty$, как $|z|^{-N-1}$. При $t = 0$ функция $\psi(t,z)$ имеет вид полинома от z степени N с коэффициентами, зависящими от времени. У этого полинома есть N комплексных корней $z_j = x_j + iy_j$, где $j = 1, \ldots, N$. Иными словами, на плоскости xy в общем случае существуют N точек M_j с зависящими от времени координатами x_j и y_j, для которых функция ψ тождественно равна нулю. С другой стороны, в числителе решения (3) стоит полином степени $N - 1$. Корни этих двух полиномов, вообще говоря, различны. Это означает, что в точках M_j амплитуда u_1 растет, как t^m. Мы будем называть эти точки «резонансами». «Резонансы» исчезают, если все корни полинома $\psi(t,z)$ вырождены, поскольку в этом случае из $\psi = 0$ следует, что и $\psi_x = 0$, т.е. в точках M_j решение u обращается в нуль. Однако поскольку коэффициенты полиномов зависят от времени, с течением времени вырождение исчезнет и «резонансы» появятся. Например, при $N = 2$ имеем две точки $M^{(\pm)}$ с координатами

$$\left(x^{(\pm)}, -\frac{4t+\beta}{2x^{(\pm)}}\right),$$

где

$$x^{(\pm)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{(4t+\beta)^2+\alpha^2}-\alpha}.$$

Здесь $\mu \equiv \alpha + i\beta$, при этом принято, что $\alpha > 0$. Амплитуда «резонансов» растет по закону

$$|u|^2 = \frac{16}{|v|^2}\left(\frac{(4t+\beta)^2}{\sqrt{(4t+\beta)^2+\alpha^2}-\alpha}-\alpha\right).$$

С течением времени скорость «резонансов» уменьшается и стремится к $\vec{v}_{as} = \pm\left\{1/\sqrt{2t}, 1/\sqrt{2t}\right\}$, причем знаки ± относятся к точкам $M^{(\pm)}$, а сами «резонансы» выходят на прямую $y = -2x$. Описанная ситуация характерна для $t > 0$. На всей же оси $t\in(-\infty, +\infty)$ динамика выглядит следующим образом: при больших отрицательных временах имеем два «резонанса» в первой и третьей четвертях координатной плоскости, движущихся к началу координат. Со временем их амплитуда уменьшается, скорость растет и при $t = 0$ возникает локализованная структура. При $t > 0$ опять имеем два «резонанса», но только во второй и четвертой четвертях, которые расходятся с замедлением и ростом амплитуды. Точно так же можно строить решения, которые экспоненциально локализованы при $t = 0$. Например, можно выбрать $\psi_0(z)$ в виде

$$\psi_0 = (\cosh(\mu z) + A\cos(\nu z) + B)^N,$$

где N — натуральное число, удовлетворяющее условию $N > 1$, поскольку при $N = 1$ будут иметь место неподвижные «резонансы» при всех временах, в том числе при $t = 0$. Если же $N > 1$, то, как и в предыдущих примерах, «резонансы» появляются при $t = 0$, причем в данном случае имеется бесконечное (но счетное) число «резонансов». В заключение предъявим решение, которое можно назвать солитоном на фоне плоской волны. Для его построения выберем затравочное решение уравнений ДС-II в виде

$$u = A\exp(iS),\ S = -(2A^2 + a^2 - b^2)\,t + ax + by,\ q = 0, \tag{4}$$

где A, a и b — вещественные константы. В качестве решений (L, A)-пары с заданными значениями потенциалов u и q возьмем функции

$$\psi_1 = f \exp\left(i\frac{S}{2} + M \right);$$

$$\psi_2 = \overline{\frac{i\ \ (2m-b)-p}{2A}\ \left(f - 2i\frac{\alpha_1}{p} \right)}\ \exp\left(i\frac{S}{2} + \bar{M} \right), \tag{5}$$

где

$$f = \alpha_1 \left[x + \frac{1}{p}\Big((b-2m)\, y + 2\Big(2\left(bm - A^2 - 2m^2 \right) - ap \Big)\ \ t \Big) \right] + \alpha_2,$$

$$M = mx + \frac{1}{2}\Big((p-a)\, y + \left[p(b+2m) - 4am \right]\ \ t \Big),$$

$$p^2 + \left[4A^2 + (b-2m)^2 \right]^2 = 0.$$

Будем считать параметры m и α_1 вещественными, $\alpha_2 = 0$ и $p = i\lambda$, $\bar{\lambda} = \lambda$. После подстановки (4) и (5) в (1) получается несингулярное решение уравнений ДС-II u_1, квадрат модуля которого при $x^2 + y^2 \to \infty$ стремится к постоянному значению: $|u_1|^2 \to A^2$. Найденное решение представляет собой локализованное образование, распространяющееся на фоне плоской волны u (4). Оно является двумерным аналогом эксультонного решения НУШ, поскольку представляет собой рациональный солитон, распространяющийся на фоне плоской волны. Примеры других точных решений уравнений ДС (I и II), построенных с помощью преобразований Дарбу можно найти в работах [4—6]. В заключение отметим, что использование формализма преобразований Дарбу оказывается полезным и в других нелинейных моделях, в частности в теории несжимаемых гидродинамических течений [7; 8] и в квантовой теории поля [9].

Список литературы

1. *Arcadiev V.A., Pogrebkov A.K., Polivanov M.C.* Inverse scattering transform method and soliton solutions for Davey — Stewartson II equation // Physica D, 1989. 36. P. 189—196.

2. *Iidem.* Closed string-like solutions of the Davey-Stewartson equation // Inverse Problems. 1989. Vol. 5, № 1. P. L1—L6.

3. *Гадыльшин Р.Р., Киселев О.М.* О бессолитонной структуре данных рассеяния при возмущении двумерного солитона уравнения Деви — Стюартсона II // ТМФ. 1996. 106. 2. С. 200—208.

4. *Leble S.B., Salle M.A., Yurov A.V.* Darboux transforms for Davey — Stewartson equations and solitons in multidimensions // Inverse Problems. 1992. T. 8, №2. P. 207—218.

5. *Iidem.* Darboux Transformation and Solitons in Multidimensions // Inverse Problems. 1992. 4. P. 207—214.

6. *Iidem.* Darboux Transformation for Davey — Stewartson Type Equations // Proceedings of the IV International Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics (Singapure). 1991. 2. P. 287—296.

7. *Iidem.* Darboux Transforms of Davey — Stewartson Type Equations and Solitons // Proceedings of Kiev Workshop 'Nonlinear World', World Scientific. 1989. №1. P. 216—228.

8. *(Charles) Li Ya., Yurov A. V.* Lax pairs and Darboux transformations for Euler equations // Studies in Applied Mathematics. 2003. T. 111, №1. P. 101—113.

9. *Yurov A. V., Yurova A. A.* One method for constructing exact solutions of equations of two-dimensional hydrodynamics of an incompressible fluid // Theoretical and Mathematical Physics. 2006. T. 147, №1. P. 501—508.

10. *Bordag M., Yurov A.* Spontaneous symmetry breaking and reflectionless scattering data // Physical Review D — Particles, Fields, Gravitation and Cosmology. 2003. T. 67, №2.

Об авторах

Алла Александровна Юрова — канд. физ.-мат. наук, доц., Калининградский государственный технический университет, e-mail: yurov@freemail.ru

Author

Alla Yurova — PhD, associate professor, Kaliningrad State Technical University, e-mail: yurov@freemail.ru

УДК 530.145

А. И. Иванов, А. А. Иванов

ОЦЕНКА ОШИБОК ДЕТЕКТИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЙ КУБИТА

Исследуется оказываемое в процессе измерения обратное действие квантового точечного контакта на состояния двойной квантовой точки. Для описания этого действия вводится вспомогательная подсистема, которая находится в перепутанных состояниях с исследуемой системой. Такая модель позволила оценить время установления стационарного состояния объединенной системы «двойная квантовая точка — квантовый точечный контакт», отождествить его со временем измерения и оценить ошибки детектирования состояний кубита.

In this paper we study the back-action of the quantum point contacton the state of a double quantum dot during the measurement process. To describe this action we introduce an auxiliary subsystem, which is in the entangled states with the original system. This model allowed us to estimate establishment of the steady state of the combined system «double quantum dot — quantum point contact», and identify it as a measurement time and estimate the errors of the qubit states detection.

Ключевые слова: двойная квантовая точка, квантовый точечный контакт, квантовые измерения.

Key words: double quantum dot, quantum point contact, quantum measurement.