Если векторные поля $\overline{B}_1$ и $\overline{e}_3$ коллинеарны и сеть линий $\{\omega^1, \omega^3\}$ -асимптотическая на поверхности $\omega^2 = 0$,описанной точкой X ,то преобразование $(X) \to (F_1^2)$ будет правильным,т.е. на касательной к линии ω^1 в точке F_1^2 отсутствует псевдофокус $\widetilde{F}_1^3$ (как отсутствует и F_1^3 на касательной к линии ω^1 в точке X).

II.Потребуем,чтобы векторы $\overline{B}_1$ и $\overline{e}_2$ были коллинеарны. Тогда $(a_{12}^2)^2 + \beta = 0$, $a_{11}^3 = 0$. При этом линия ω^1 -асимптотическая линия на поверхности $\omega^3 = 0$,описанной точкой X . Она преобразуется в геодезическую линию поверхности $\omega^3 = 0$, описанной точкой F_1^2.

III.Потребуем,чтобы векторы $\overline{B}_1$ и $\overline{e}_1$ были коллинеарны.Тогда $a_{11}^2 = a_{11}^3 = 0$. Значит,линия ω^1 -прямая.Очевидно, что она преобразуется в ту же самую прямую.Следовательно, данная сеть и ее преобразование имеют одно общее семейство линий,состоящее из прямых.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6 1975

Е.В.З а в ь я л о в а

ТРИ-СИСТЕМЫ КОНИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуется двупараметрическое семейство K фигур F ,образованных т тройкой попарно касающихся невырожденных коник C_1, C_2, C_3, лежащих в различных плоскостях.Такое семейство названо три-системой коник.

Построен каноничнский репер три-системы K ,различные, ассоциированные с ней геометрические образы и рассмотрена три-система K ,все коники которой инцидентны одной квадрике.

§I.Теорема существования

Отнесем три-систему K к каноническому реперу $\{A_J\}$ $(J, \gamma, \varkappa = 1,2,3,4)$,поместив вершины A_α в точке пересечения коник C_β, C_γ $(\alpha,\beta,\gamma = 1,2,3)$,вершину A_4 -в общую точку плоскостей коник C_α,пронормировав вершины репера так,чтобы уравнения коник C_α имели вид:

$$(x^4)^2 - 2x^\beta x^\gamma = 0, \quad x^\alpha = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь и в дальнейшем индексы α, β, γ считаются попарно различными и по ним суммирование не производится.

Деривационные формулы репера $\{A_\gamma\}$ записываются в виде

$$d A_\gamma = \omega_\gamma^\varkappa A_\varkappa , \tag{1.2}$$

причем формы Пфаффа $\omega_\gamma^\varkappa$ удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\gamma^\varkappa = \omega_\gamma^\jmath \wedge \omega_\jmath^\varkappa \tag{1.3}$$

и условию

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0 . \tag{1.4}$$

Мы будем рассматривать общий случай, когда плоскости $(A_1A_2A_3)$ образуют двупараметрическое семейство. Принимая формы

$$\omega_1 = \omega_1^4 , \quad \omega_2 = \omega_2^4 \tag{1.5}$$

за независимые первичные, запишем пфаффову систему уравнений три-системы K в виде

$$\begin{gathered} \omega_3^4 = \Gamma_3^{4\kappa}\,\omega_\kappa , \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3\kappa}\,\omega_\kappa , \quad \omega_\alpha^\beta = \Gamma_\alpha^{\beta\kappa}\,\omega_\kappa , \\ \omega_\alpha^\alpha + \omega_\beta^\beta - 2\,\omega_4^4 = 2\,p_\gamma^\kappa\,\omega_\kappa , \qquad \omega_4^i = \Gamma_4^{i\kappa}\,\omega_\kappa . \end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь и в дальнейшем индексы $\ell, i, \kappa, j = 1,2 ; \ i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Т е о р е м а 1.1. Три-системы K существуют и определяются с произволом 13 функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Замыкая систему (1.6), получим

$$\begin{gathered} \Delta\Gamma_3^{4\kappa} \wedge \omega_\kappa = 0, \ \ \Delta\Gamma_4^{3\kappa} \wedge \omega_\kappa = 0, \ \ \Delta\Gamma_\alpha^{\beta\kappa} \wedge \omega_\kappa = 0, \\ \Delta\Gamma_4^{i\kappa} \wedge \omega_\kappa = 0, \ \ \Delta p_\gamma^\kappa \wedge \omega_\kappa = 0 , \end{gathered} \tag{1.7}$$

где

$$\Delta\Gamma_3^{4\kappa} = d\Gamma_3^{4\kappa} + \Gamma_3^{4\ell}(\omega_\ell^\kappa + \Gamma_3^{4\kappa}\omega_\ell^3) - \omega_3^\kappa - \Gamma_3^{4\kappa}\omega_3^3 ,$$

$$\Delta\Gamma_4^{3\kappa} = d\Gamma_4^{3\kappa} + \Gamma_4^{3\kappa}(\omega_3^3 - 2\omega_4^4) + \Gamma_4^{3\ell}(\omega_\ell^\kappa + \Gamma_3^{4\kappa}\omega_\ell^3) - \Gamma_\ell^{3\kappa}\omega_4^\ell ,$$

$$\Delta\Gamma_i^{j\kappa} = d\Gamma_i^{j\kappa} + \Gamma_i^{j\kappa}(\omega_j^j - \omega_i^i - \omega_4^4) + \Gamma_i^{3\kappa}\omega_3^j - \Gamma_\kappa^{j4}\omega_i + \Gamma_i^{jt}(\omega_t^\kappa + \Gamma_3^{4\kappa}\omega_t^3),$$

$$\Delta\Gamma_i^{3\kappa} = d\Gamma_i^{3\kappa} + \Gamma_i^{3\kappa}(\omega_3^3 - \omega_4^4) + \Gamma_i^{3t}(\omega_t^\kappa + \Gamma_3^{4\kappa}\omega_t^3) - \Gamma_t^{3\kappa}\omega_i^t - \Gamma_4^{3\kappa}\omega_i ,$$

$$\Delta\Gamma_3^{i\kappa} = d\Gamma_3^{i\kappa} - \Gamma_3^{i\kappa}(\omega_3^3 + \omega_4^4) + \Gamma_3^{t\kappa}\omega_t^i + \Gamma_3^{4\kappa}\omega_4^i + \Gamma_3^{it}(\omega_t^\kappa + \Gamma_3^{4\kappa}\omega_t^3),$$

$$\Delta\Gamma_4^{i\kappa} = d\Gamma_4^{i\kappa} - 2\Gamma_4^{i\kappa}\omega_4^4 + \Gamma_4^{t\kappa}\omega_t^i + \Gamma_4^{3\kappa}\omega_3^i + \Gamma_4^{it}(\omega_t^\kappa + \Gamma_3^{4\kappa}\omega_t^3),$$

$$\begin{aligned} \Delta p_3^\kappa = d p_3^\kappa - p_3^\kappa\omega_4^4 + \Gamma_1^{3\kappa}\omega_3^1 + \Gamma_2^{3\kappa}\omega_3^2 + 2\Gamma_3^{4\kappa}\omega_4^3 + \\ + p_3^t(\omega_t^\kappa + \Gamma_3^{4\kappa}\omega_t^3) - 3\Gamma_4^{j\kappa}\omega_j , \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} \Delta p_1^\kappa = d p_1^\kappa - p_1^\kappa\omega_4^4 + \Gamma_2^{1\kappa}\omega_1^2 + \Gamma_3^{1\kappa}\omega_1^3 + 3\Gamma_3^{4\kappa}\omega_4^3 + \\ + p_1^t(\omega_t^\kappa + \Gamma_3^{4\kappa}\omega_t^3) - 2\Gamma_4^{1\kappa}\omega_1 - 3\Gamma_4^{2\kappa}\omega_2 , \end{aligned}$$

$$\Delta p_2^\kappa = d p_2^\kappa - p_2^\kappa\omega_4^4 + \Gamma_1^{2\kappa}\omega_2^1 + \Gamma_3^{2\kappa}\omega_2^3 + 3\Gamma_3^{4\kappa}\omega_4^3 + p_2^t(\omega_t^\kappa + \Gamma_3^{4\kappa}\omega_t^3) - 3\Gamma_4^{1\kappa}\omega_1 - 2\Gamma_4^{2\kappa}\omega_2 .$$

Анализируя замкнутую систему (1.6),(1.7), находим

$$S_1 = 13 , \quad q = 26 , \quad S_2 = 13 , \quad Q = N = 39 . \tag{1.9}$$

Следовательно, система (1.6),(1.7)-в инволюции и определяет три-системы K с произволом 13 функций двух аргументов [1]. Геометрически этот произвол интерпретируется следующим образом. Чтобы задать три-систему $K \subset P_3$, надо прежде всего задать поверхность (A_4), на что потребуется одна функция двух аргументов. Затем в точках поверхности (A_4) надо задать одномерные направления $[A_4A_\alpha]$ $(\alpha=1,2,3)$, т. е. в точках этой поверхности определить три поля направлений $[A_4A_\alpha]$. Каждое такое поле определяется заданием двух функций двух аргументов, а всего при этом израсходуем шесть функций двух аргументов. На каждой прямой $[A_4A_\alpha]$ надо задать точку A_α. Так как $\alpha=1,2,3$, то понадобится еще три функции двух аргументов. Теперь остается в каждой грани $[A_4A_\alpha A_\beta]$ задать конику C_γ, которая касалась бы ребер $[A_4A_\alpha]$, $[A_4A_\beta]$ соответственно в точках A_α, A_β. Уравнение такой коники имеет вид:

$$C_\gamma: \quad (x^4)^2-2p_\gamma x^\alpha x^\beta=0, \quad x^\gamma=0$$

(α,β,γ различны и принимают значения 1,2,3).

Значит, чтобы определить нужное нам семейство коник C_γ, надо задать p_γ как дифференцируемую функцию двух аргументов (координат точки A_4 на поверхности (A_4)). Так как $\gamma=1,2,3$, то потребуется еще три функции двух аргументов. Теперь три-система $K\subset P_3$ полностью определена. Для её определения нам потребовалось задать 1+6+3+3=13 функций двух аргументов, что в точности совпадает с произволом существования три-системы K, который был получен выше при доказательстве теоремы существования.

§2. Основные ассоциированные геометрические образы

1. Фокальные поверхности и торсы прямолинейных конгруэнций ребер канонического репера.

С три-системой K ассоциируются шесть прямолинейных конгруэнций $(A_\alpha A_\beta)$ и (A_4A_α), описанных ребрами канонического репера. Уравнения для определения фокусов

$$F=\lambda A_\alpha+\mu A_\beta \tag{2.1}$$

луча $[A_\alpha A_\beta]$ и торсов прямолинейной конгруэнции $(A_\alpha A_\beta)$ имеют вид (соответственно):

$$(\lambda\Gamma^{\gamma 1}_\alpha+\mu\Gamma^{\gamma 1}_\beta)(\lambda\Gamma^{42}_\alpha+\mu\Gamma^{42}_\beta)-(\lambda\Gamma^{\gamma 2}_\alpha+\mu\Gamma^{\gamma 2}_\beta)(\lambda\Gamma^{41}_\alpha+\mu\Gamma^{41}_\beta)=0, \tag{2.2}$$

$$(\Gamma^{\gamma k}_\alpha\Gamma^{4\ell}_\beta-\Gamma^{4k}_\alpha\Gamma^{\gamma\ell}_\beta)\,\omega_k\,\omega_\ell=0. \tag{2.3}$$

Здесь и в дальнейшем

$$\Gamma^{4k}_i=\delta^k_i. \tag{2.4}$$

Фокусы

$$\tilde F=\tilde\lambda A_4+\tilde\mu A_\alpha \tag{2.5}$$

луча $[A_4A_\alpha]$ и торсы прямолинейной конгруэнции (A_4A_α) определяются соответственно уравнениями

$$(\tilde\lambda\Gamma^{\beta 1}_4+\tilde\mu\Gamma^{\beta 1}_\alpha)(\tilde\lambda\Gamma^{\gamma 2}_4+\tilde\mu\Gamma^{\gamma 2}_\alpha)-(\tilde\lambda\Gamma^{\beta 2}_4+\tilde\mu\Gamma^{\beta 2}_\alpha)(\tilde\lambda\Gamma^{\gamma 1}_4+\tilde\mu\Gamma^{\gamma 1}_\alpha)=0, \tag{2.6}$$

$$(\Gamma^{\beta k}_4\Gamma^{\gamma\ell}_\alpha-\Gamma^{\gamma k}_4\Gamma^{\beta\ell}_\alpha)\,\omega_k\,\omega_\ell=0. \tag{2.7}$$

2. Характеристические точки граней канонического репера.

Обозначим буквой M характеристическую точку плоскости $[A_1A_2A_3]$, буквами M_γ — характеристические точки плоскостей $[A_4A_\alpha A_\beta]$. Используя уравнения (1.6), из уравнений

$$(dM_1 A_1 A_2 A_3)=0, \qquad (dM_\gamma A_4 A_\alpha A_\beta)=0 \tag{2.8}$$

находим

$$M_1 = A_3 - \Gamma_3^{4k}\omega_k, \tag{2.9}$$

$$M_\gamma = (\Gamma_\alpha^{\gamma 1}\Gamma_\beta^{\gamma 2} - \Gamma_\alpha^{\gamma 2}\Gamma_\beta^{\gamma 1})A_4 + (\Gamma_\beta^{\gamma 1}\Gamma_4^{\gamma 2} - \Gamma_\beta^{\gamma 2}\Gamma_4^{\gamma 1})A_\alpha + (\Gamma_4^{\gamma 1}\Gamma_\alpha^{\gamma 2} - \Gamma_4^{\gamma 2}\Gamma_\alpha^{\gamma 1})A_\beta . \tag{2.10}$$

3. Касательные плоскости поверхностей, описанных вершинами канонического репера.

Касательные плоскости поверхности (A_4) и поверхностей (A_α) определяются соответственно формулами

$$[A_4, \Gamma_4^{k1}A_k + \Gamma_4^{31}A_3, \; \Gamma_4^{k2}A_k + \Gamma_4^{32}A_3], \tag{2.11}$$

$$[A_\alpha, \Gamma_\alpha^{\beta 1}A_\beta + \Gamma_\alpha^{\gamma 1}A_\gamma, \; \Gamma_\alpha^{\beta 2}A_\beta + \Gamma_\alpha^{\gamma 2}A_\gamma]. \tag{2.12}$$

4. Фокальные поверхности и фокальные семейства конгруэнции коник C_α [2].

Уравнения для определения фокальных семейств и фокальных поверхностей конгруэнции (C_α) имеют вид :

$$(x^4)^2 - 2x^\beta x^\gamma = 0, \quad x^\alpha = 0, \quad (\Gamma_\beta^{\alpha k}x^\beta + \Gamma_\gamma^{\alpha k}x^\gamma + \Gamma_4^{\alpha k}x^4)\omega_k = 0,$$

$$\{x^\beta[x^\alpha\Gamma_\alpha^{\gamma k} + x^\beta\Gamma_\beta^{\gamma k} + x^4(\Gamma_4^{\gamma k} - \Gamma_\beta^{4k})] + x^\gamma[x^\alpha\Gamma_\alpha^{\beta k} + x^\gamma\Gamma_\gamma^{\beta k} + x^4(\Gamma_4^{\beta k} - \Gamma_\gamma^{4k})] + x^\beta x^\gamma p_\alpha^k - x^\alpha x^4\Gamma_\alpha^{4k}\}\omega_k = 0 . \tag{2.13}$$

5. Ассоциированная конгруэнция квадрик.

Три коники C_1, C_2, C_3 принадлежат единственной квадрике Q:

$$F \equiv (x^4)^2 - 2x^1x^2 - 2x^2x^3 - 2x^3x^1 = 0 . \tag{2.14}$$

Имеем

$$dF = 2(\theta - \omega_4^4)F - 2x^1x^4(\omega_1 - \omega_4^2 - \omega_4^3) - 2x^2x^4(\omega_2 - \omega_4^1 - \omega_4^3) - 2x^3x^4(\omega_3^4 - \omega_4^2 - \omega_4^1) + 2(x^1)^2(\omega_1^2 + \omega_1^3) + 2(x^2)^2(\omega_2^1 + \omega_2^3) + 2(x^3)^2(\omega_3^2 + \omega_3^1) + 2x^1x^2(\omega_1^3 + \omega_2^3 + \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_4^4) + 2x^1x^3(\omega_1^2 + \omega_3^2 + \omega_1^1 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4) + 2x^2x^3(\omega_3^1 + \omega_2^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4). \tag{2.15}$$

Используя уравнения (1.6), получим

$$\tfrac{1}{2}dF = F^1\omega_1 + F^2\omega_2 + (\theta - \omega_4^4)F, \tag{2.16}$$

где

$$F^1 = (\Gamma_1^{21}+\Gamma_1^{31})(x^1)^2 + (\Gamma_2^{11}+\Gamma_2^{31})(x^2)^2 + (\Gamma_3^{21}+\Gamma_3^{11})(x^3)^2 + (\Gamma_1^{31}+\Gamma_2^{31}+p_3^1)x^1x^2 + (\Gamma_1^{21}+\Gamma_3^{21}+p_2^1)x^1x^3 + (\Gamma_4^{21}+\Gamma_4^{31}-1)x^1x^4 + (\Gamma_3^{11}+\Gamma_2^{11}+p_1^1)x^2x^3 + (\Gamma_4^{11}+\Gamma_4^{31}-1)x^2x^4 + (\Gamma_4^{11}+\Gamma_4^{21}-\Gamma_3^{41})x^3x^4,$$

$$F^2 = (\Gamma_1^{22}+\Gamma_1^{32})(x^1)^2 + (\Gamma_2^{12}+\Gamma_2^{32})(x^2)^2 + (\Gamma_3^{22}+\Gamma_3^{12})(x^3)^2 + (\Gamma_1^{32}+\Gamma_2^{32}+p_3^2)x^1x^2 + (\Gamma_1^{22}+\Gamma_3^{22}+p_2^2)x^1x^3 + (\Gamma_4^{21}+\Gamma_4^{31}-1)x^1x^4 + (\Gamma_3^{12}+\Gamma_2^{12}+p_1^2)x^2x^3 + (\Gamma_4^{12}+\Gamma_4^{32}-1)x^2x^4 + (\Gamma_4^{12}+\Gamma_4^{22}-\Gamma_3^{42})x^3x^4.$$

Система уравнений для определения фокальных точек квадрики Q[3] конгруэнции (Q) имеет вид:

$$F=0\,,\quad F^1=0\,,\quad F^2=0\,. \tag{2.17}$$

Отсюда следует, что равенства

$$\Gamma^{21}_1+\Gamma^{31}_1=0\,,\quad \Gamma^{22}_1+\Gamma^{32}_1=0 \tag{2.18}$$

выражают условия того, что точка A_1 является фокальной точкой квадрики Q. Точно так же условия

$$\Gamma^{11}_2+\Gamma^{31}_2=0\,,\quad \Gamma^{12}_2+\Gamma^{32}_2=0 \tag{2.19}$$

означают, что A_2 является фокальной точкой квадрики Q. Наконец, условия

$$\Gamma^{11}_3+\Gamma^{21}_3=0,\quad \Gamma^{12}_3+\Gamma^{22}_3=0 \tag{2.20}$$

означают, что точка A_3 является фокальной точкой квадрики Q.

§3. Три-система коник, инцидентных одной квадрике

О п р е д е л е н и е. Три-системой K^* называется три-система K, все коники которой инцидентны одной квадрике.

Т е о р е м а 3.1. Три-системы K^* существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Три-системы K^* характеризуются инвариантностью ассоциированной квадрики Q:

$$F+dF=(\lambda_0+\lambda_1)F, \tag{3.1}$$

где λ_0 -некоторая функция, а λ_1 -некоторая форма Пфаффа. Используя формулы (2.14), (2.15) и (3.1), приходим к следующей системе уравнений Пфаффа:

$$\omega^3_1=-\omega^2_1\,,\quad \omega^1_2=-\omega^3_2\,,\quad \omega^2_3=-\omega^1_3\,,$$

$$\begin{aligned}&\omega^1_1+\omega^2_2-2\,\omega^4_4=\omega^2_1-\omega^3_2\,,\quad \omega^2_2+\omega^3_3-2\,\omega^4_4=\omega^3_2-\omega^1_3\,,\\ &\omega^1_1+\omega^3_3-2\,\omega^4_4=\omega^2_3-\omega^2_1\,,\quad \omega^3_4=\omega_1+\omega_2-\omega^4_3\,,\\ &\omega^1_4=\omega^4_3-\omega_1\,,\quad \omega^2_4=\omega^4_3-\omega_2\,.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Три-система K^* определяется уравнениями (3.2) и уравнениями

$$\omega^2_1=\Gamma^{2\kappa}_1\omega_\kappa\,,\ \omega^3_2=\Gamma^{3\kappa}_2\omega_\kappa\,,\ \omega^1_3=\Gamma^{1\kappa}_3\omega_\kappa\,,\ \omega^4_3=\Gamma^{4\kappa}_3\omega_\kappa\,. \tag{3.3}$$

Система уравнений (3.2) вполне интегрируемая, так как она совпадает с системой уравнений стационарности квадрики Q. Замыкание уравнений (3.3) имеет вид:

$$\Delta\Gamma^{2\kappa}_1\wedge\omega_\kappa=0\,,\ \Delta\Gamma^{3\kappa}_2\wedge\omega_\kappa=0,\ \Delta\Gamma^{1\kappa}_3\wedge\omega_\kappa=0\,,\ \Delta\Gamma^{4\kappa}_3\wedge\omega_\kappa=0, \tag{3.4}$$

где

$$\Delta\Gamma^{2\kappa}_1=d\Gamma^{2\kappa}_1-\Gamma^{2\kappa}_1(\omega^1_1-\omega^2_2+\omega^4_4+\omega^2_3)+\delta^\kappa_1\omega^2_4+\Gamma^{2i}_1(\omega^\kappa_i+\Gamma^{4\kappa}_3\omega^3_i),$$

$$\Delta\Gamma^{3\kappa}_2=d\Gamma^{3\kappa}_2-\Gamma^{3\kappa}_2(\omega^2_2-\omega^3_3+\omega^4_4)+\Gamma^{2\kappa}_1\omega^1_2+\delta^\kappa_2\omega^3_4+\Gamma^{3i}_2(\omega^\kappa_i+\Gamma^{4\kappa}_3\omega^3_i),$$

$$\Delta\Gamma^{1\kappa}_3=d\Gamma^{1\kappa}_3-\Gamma^{1\kappa}_3(\omega^3_3-\omega^1_1+\omega^4_4+\omega^1_2)+\delta^\kappa_1\omega^1_4+\Gamma^{1i}_3(\omega^\kappa_i+\Gamma^{4\kappa}_3\omega^3_i).$$

$$\Delta\Gamma^{4\kappa}_3=d\Gamma^{4\kappa}_3-\Gamma^{4\kappa}_3\omega^3_3-\delta^\kappa_1\omega^1_3+\delta^\kappa_2\omega^2_3+\Gamma^{4i}_3(\omega^\kappa_i+\Gamma^{4\kappa}_3\omega^3_i).$$

Имеем $S_1=4\,,\ q=8\,,\ S_2=q-S_1=4,\ Q=N=12\,.$

Система (3.2), (3.3), (3.4) - в инволюции и определяет три-системы K^* с произволом четырех функций двух аргументов.

С п и с о к   л и т е р а т у р ы

1.Ф и н и к о в С.П. Метод внешних форм Картана.М.-Л. ГИТТЛ,1948,с.432.

2.М а л а х о в с к и й В.С. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве.-"Труды Томск.ун-та",1963,№168,с.43-53.

3.М а л а х о в с к и й В.С.,Махоркин В.В. Конгруэнции поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве.-Вкн .:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.4,Калининград,1974,с.86-106.

Т.Н. К о п ы т и н а

К ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ СЕТЕЙ С НЕПОДВИЖНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТЬЮ

В статье рассматривается пара голономных сетей в проективном пространстве P_3 ,между которыми устанавливается дифференцируемое взаимно однозначное отображение,причем одна из сетей имеет неподвижную гармоническую плоскость [1].Изучаются особенности сетей в зависимости от взаимного расположения треугольников,возникающих в гармонической плоскости.Рассмотрен случай,когда линии сети являются характеристическими [2].

1.Пусть Σ_3 —сеть с неподвижной гармонической плоскостью,описываемая точкой A, и $\{AA_i\}$ $(i=1,2,3)$-проективный репер,присоединенный к ней, AA_i-касательная к линии ω^i сети Σ_3,а в качестве A_i берем гармонический полюс соответствующей линии сети [1].

Инфинитезимальные перемещения репера определяются системой уравнений

$$dA=\omega_0^0 A+\omega^i A_i, \quad dA_i=\omega_i^j A_j, \quad (i,j=1,2,3), \tag{1}$$