поверхность каждой из которых есть касательно τ-оснащенная поверхность $V_{m,\tau}$.

Библиографический список

1. П о п о в Ю.И. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1984. 93с. Библиогр. 21 назв. Деп. в ВИНИТИ 2.07.84. № 4481-84 Деп.

2. П о п о в Ю.И. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1984. 36 с. Библиогр. 8 назв. Деп. в ВИНИТИ 9.01.85. № 252-85 Деп.

3. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределение m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.49-94.

4. О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.95-114.

5. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т.7. С.117-151.

6. П о п о в Ю.И. Трехсоставные регулярные распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ проективного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1982. 126 с. Библиогр. 20 назв. Деп. в ВИНИТИ 16.12.82. № 6192-82 Деп.

7. Н о р д е н А.П., Т и м о ф е е в Г.Н. Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств // Известия вузов. Математика. 1972. №8. С.81-89.

8. Д о м б р о в с к и й Р.Ф. О неголономных композициях на поверхностях $M_{m,\tau}$ в P_n // Всес. науч. конф. по неевкл. геометрии: "150 лет геометрии Лобачевского". Казань. Тезисы докл. М., 1976. С.69.

9. П о п о в Ю.И. Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1990. 128 с. Библиогр. 149 назв. Деп. в ВИНИТИ 5.11.90. № 5625-В90 Деп.

УДК 514.75

ПАРЫ Т КОНГРУЭНЦИЙ, У КОТОРЫХ СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ПРЯМЫЕ ИМЕЮТ РАВНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ АБСЦИСС ФОКУСОВ

О.С.Р е д о з у б о в а

(МГПИ им. В.И.Ленина)

В евклидовом трехмерном пространстве рассматриваются пары Т конгруэнций, у которых соответствующие прямые имеют равные произведения абсцисс соответствующих фокусов. Изучены геометрические свойства таких конгруэнций в общем случае. Пары обозначены буквой Т'.

К паре Т' конгруэнций $\{\tau_a\}$ $(a=1,2)$ присоединена конгруэнция $\{\tau\}$ общих перпендикуляров. Прямая τ пересекает прямые τ_a в точках K_a. С конфигурацией связан подвижный ортонормированный репер $R=(O,\vec{e}_i)$ $(i=1,2,3)$ такой, что $\vec{e}_3 \parallel \tau$. При перемещении репера имеют место формулы:

$$d\vec{O} = \omega^i \vec{e}_i\,, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j \quad (i,j=1,2,3).$$

Направляющие векторы прямых τ_a есть векторы $\vec{\eta}_a=\vec{e}_1\cos\alpha_a+\vec{e}_2\sin\alpha_a$, где α_a – углы, образуемые векторами $\vec{\eta}_a$ с вектором $\vec{e}_1$. По отношению к реперу $R_a=(K_a,\vec{\eta}_a)$ фокусы F_a, F_a' прямых τ_a имеют координаты ρ_a, ρ_a' $(a=1,2)$. Точки K_a относительно репера $\tilde{R}=(O,\vec{e}_3)$ имеют координаты h_a.

Пары Т конгруэнций определяются системой уравнений (2) в работе [1]. Известно, что пары Т конгруэнций могут быть общими и специальными. Первые существуют с произволом двух функций двух аргументов.

Т е о р е м а 1. Пары Т' конгруэнций существуют в общем случае с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В общем случае пары Т конгруэнций определяются системой уравнений (3) из [1]:

$$\begin{cases} A_1 = \Omega_{13}\dfrac{\rho_2\rho_2'(\rho_1'-\rho_1)}{\rho(h_1-h_2)} + Q_1\dfrac{\rho_2-\rho_2'}{\rho}, \\ H_1 = \Omega_{13}\dfrac{\rho_1\rho_1'(\rho_2'-\rho_2)}{\rho(h_1-h_2)} + Q_1\dfrac{\rho_1-\rho_1'}{\rho}. \end{cases} \tag{1}$$

и еще два уравнения, полученные заменой указателей I - на 2 и 2 - на I. Здесь использованы обозначения работы [1,с.3], $\rho=\rho_2\rho_1'-\rho_1\rho_2'\neq 0$. К системе уравнений (1) присоединяется уравнение $\rho_1\rho_2=\rho_1'\rho_2'$. Обозначая $\rho_1=S\rho_1'$ $(S\neq 1)$, получим $\rho_2'=S\rho_2$ $(\rho_1\neq 0,\ \rho_2\neq 0)$. После некоторых преобразований получим систему уравнений, определяющую пары T$'$ конгруэнций в общем случае:

$$\begin{cases} A_1=-H_1\dfrac{\rho_2}{\rho_1'}, \quad A_2=-H_2\dfrac{\rho_1'}{\rho_2}, \quad \rho_1=S\rho_1', \quad \rho_2'=S\rho_2, \\ Q_1=-H_1(1+S)\rho_2-\Omega_{13}\dfrac{S\rho_1'\rho_2}{h_1-h_2}, \quad Q_2=-H_2(1+S)\rho_1'-\Omega_{23}\dfrac{S\rho_1'\rho_2}{h_1-h_2}. \end{cases} \tag{2}$$

После дифференцирования этой системы уравнений внешним образом и подстановки туда выражений A_a, Q_a $(a=1,2)$ из (2) получим четыре квадратичных уравнения, в которых формы Ω_{a3} - линейно независимые, а функции $d\rho_1'$, $d\rho_2$, ds, H_a - неизвестные. Исследуя систему уравнений (2), получим, что пары T$'$ конгруэнций определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а 2. Пары T$'$ конгруэнций в общем случае являются равнонаклонными парами 2-го типа тогда и только тогда, когда равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть фокальные расстояния F_1F_1' и F_2F_2' соответствующих прямых пары T$'$ конгруэнций равны между собой. Тогда $\rho_1'-\rho_1=\rho_2'-\rho_2$, и, следовательно, из системы уравнений (2) имеем $\rho_1'(S-1)=\rho_2(1-S)$, откуда $\rho_1'=-\rho_2$. Тогда из системы (2) имеем $\rho_2'=-\rho_1$. Следовательно, пары T$'$ конгруэнций, у которых $F_1F_1'=F_2F_2'$, есть равнонаклонные пары 2-го типа. Обратно, если пары T$'$ конгруэнций есть равнонаклонные пары 2-го типа, то в соответствии с теоремой 13 [1, с.15] соответствующие прямые имеют равные фокальные расстояния.

Доказано [1, с.14], что пары T конгруэнций 2-го типа существуют с произволом одной функции двух аргументов и определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} A_1=H_1, \quad A_2=H_2, \quad \rho_1'=-\rho_2, \quad \rho_2'=-\rho_1, \\ Q_1=H_1(\rho_1-\rho_2)-\Omega_{13}\dfrac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}, \quad Q_2=-H_2(\rho_1-\rho_2)-\Omega_{23}\dfrac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}. \end{cases} \tag{3}$$

Можно доказать, что имеет место

Т е о р е м а 3. Пары T$'$ конгруэнций являются равнонаклонными парами 2-го типа тогда и только тогда, когда равны между собой углы между фокальными плоскостями соответствующих прямых пары дополнительных конгруэнций F_1F_2 и $F_1'F_2'$.

Т е о р е м а 4. Пары T$'$ конгруэнций с постоянным расстоянием между соответствующими прямыми являются парами 2-го типа тогда и только тогда, когда постоянен угол между этими прямыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть пары T$'$ конгруэнций, определяемые системой уравнений (2), имеют постоянное расстояние между соответствующими прямыми. Тогда $h_1-h_2=const$ или $H_1=H_2\equiv H$. Если к тому же постоянен и угол между этими прямыми, то $\alpha_1-\alpha_2=const$ или $A_1=A_2\equiv A$. Подставляя полученные условия в систему уравнений (2), получим, что $\rho_1'=-\rho_2$, $\rho_2'=-\rho_1$ и, следовательно, $F_1F_1'=F_2F_2'$. По теореме 2 такие пары есть пары 2-го типа. Обратно, если пары T$'$ конгруэнций с постоянным расстоянием между соответствующими прямыми есть пары 2-го типа, то они определяются системой уравнений (3), к которой надо присоединить $H_1=H_2$. Но тогда из этой системы следует постоянство угла между соответствующими прямыми.

Можно доказать, что такие пары существуют с произволом трех функций одного аргумента.

Т е о р е м а 5. Пары T$'$ нормальных конгруэнций являются парами 2-го типа и существуют с произволом трех функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. К системе уравнений (2), определяющей пары T$'$ конгруэнций в общем случае, присоединяются условия нормальности конгруэнций $\{\tau_a\}$ $(a=1,2)$ пары:

$$(h_1-h_2)^2+\rho_1\rho_1'\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)=0, \quad (h_1-h_2)^2+\rho_2\rho_2'\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)=0. \tag{4}$$

Отсюда следует, что $\rho_2' = \frac{\rho_1\rho_1'}{\rho_2}$. Присоединяя требование $\rho_1\rho_2=\rho_1'\rho_2'$ получим $\rho_1' = -\rho_2$, $\rho_2' = -\rho_1$, откуда следует, что пары T′ конгруэнций – 2-го типа. Пары T′ нормальных конгруэнций определяются, таким образом, системой уравнений (3), (4). При дифференцировании уравнений (4) получим условие:

$$\rho_1 d\rho_2 + \rho_2 d\rho_1 = 2(H_1-H_2)\frac{(h_1-h_2)^2}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}\left(1-\cos(\alpha_1-\alpha_2)\right). \qquad (5)$$

Система квадратичных уравнений системы (3), (4), (5) содержит три независимых уравнения и три неизвестные функции H_a, $d\rho_1$–$d\rho_2$. Исследование такой системы уравнений приводит к выводу о том, что пары T′ нормальных конгруэнций существуют с произволом трех функций одного аргумента.

Т е о р е м а 6. Пары T′ нормальных конгруэнций имеют постоянное расстояние между соответствующими прямыми тогда и только тогда, когда постоянно произведение абсцисс соответствующих фокусов или когда постоянен угол между соответствующими прямыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. К системе уравнений (3), (4), (5) присоединим условие $H_1=H_2$, тогда из уравнения (5) следует $\rho_1\rho_2=\mathrm{const}$. Обратное также верно. Аналогично, если $H_1=H_2$, то из (3) следует, что $A_1=A_2$, т.е. $\alpha_1-\alpha_2=\mathrm{const}$ и обратно, если $A_1=A_2$, то из (3) имеем $H_1=H_2$ и тогда $h_1-h_2=\mathrm{const}$.

Можно доказать, что пары T′ нормальных конгруэнций с постоянным расстоянием между соответствующими прямыми существуют с произволом двух функций одного аргумента.

Т е о р е м а 7. Пары T конгруэнций в общем случае с нормальными дополнительными конгруэнциями существуют с произволом четырех функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. К системе уравнений (I), определяющей пары T конгруэнций в общем случае, присоединяются условия нормальности конгруэнций дополнительной пары $\{F_1F_2\}$, $\{F_1'F_2'\}$:

$$(h_1-h_2)^2\cos(\alpha_1-\alpha_2)+\rho_1\rho_2\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)=0,\quad (h_1-h_2)^2\cos(\alpha_1-\alpha_2)+\rho_1'\rho_2'\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)=0. \qquad (6)$$

Отсюда следует, что $\rho_1\rho_2=\rho_1'\rho_2'$ и пары, следовательно, являются парами T′ конгруэнций и определяются системой уравнений

(2), (6). После дифференцирования уравнений (6) и подстановки туда выражений A_a $(a=1,2)$ из системы (2) получим:

$$\nabla\cdot\sin^2(\alpha_1-\alpha_2) = -2(H_1-H_2)(h_1-h_2)^2\cos(\alpha_1-\alpha_2) +$$
$$+\left(H_2\frac{\rho_1'}{\rho_2} - H_1\frac{\rho_2}{\rho_1'}\right)(h_1-h_2)^2\left(1+\cos^2(\alpha_1-\alpha_2)\right)=0. \qquad (7)$$

Здесь

$$\nabla = d(s\rho_1'\rho_2) = d(\rho_1\rho_2) = ds\,\rho_1'\rho_2 + s\rho_2 d\rho_1' + s\rho_1' d\rho_2 = \rho_1 d\rho_2 + \rho_2 d\rho_1. \qquad (8)$$

Подставляя ∇ из (8) в систему квадратичных уравнений системы (2), (6), (7), получим систему четырех независимых уравнений с неизвестными функциями H_a, $d\rho_1'$, $d\rho_2$. Исследуя систему, приходим к выводу о том, что рассматриваемые пары определяются с произволом четырех функций одного аргумента.

Т е о р е м а 8. Пары T конгруэнций с нормальными дополнительными конгруэнциями, у которых постоянны расстояния между соответствующими прямыми и углы между ними, есть пары 2-го типа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пары T конгруэнций с нормальными дополнительными конгруэнциями есть пары T′ и определяются системой (2), (6), (7). По условию постоянства расстояний между соответствующими прямыми и углов между ними $A_1=A_2$, $H_1=H_2$. В соответствии со следствием теоремы 17 [1, с.19] пары T конгруэнций являются парами 2-го типа.

Т е о р е м а 9. Пары T конгруэнций с нормальными дополнительными конгруэнциями, у которых равны фокальные расстояния соответствующих прямых и постоянно произведение абсцисс соответствующих фокусов, имеют постоянное расстояние и постоянный угол между соответствующими прямыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пары T конгруэнций с нормальными дополнительными конгруэнциями есть пары T′, и так как по условию равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых, то по теореме 2 эти пары являются парами 2-го типа. Такие пары определяются системой уравнений (3), (6), (7). Так как по условию $\rho_1\rho_2=\mathrm{const}$, то $\nabla=0$. Подставляя в уравнение (7) $A_1=H_1$, $A_2=H_2$ из (3) и $\nabla=0$, получим $H_1=H_2$. Но тогда и $A_1=A_2$. Следовательно, постоянно расстоя-

7 Зак. 2305

ние между соответствующими прямыми и угол между ними.

Можно доказать, что имеет место

Т е о р е м а 10. Для пары Т конгруэнций с нормальными дополнительными конгруэнциями два из трех нижеприведенных условий приводит к третьему: а/ постоянно произведение абсцисс соответствующих фокусов; б/ постоянно расстояние между соответствующими прямыми; в/ постоянен угол между соответствующими прямыми. Произвол существования таких пар конгруэнций - две функции одного аргумента.

Библиографический список

1. Р е д о з у б о в а О.С. Основы метрической теории пар Т конгруэнций / МГПИ им. В.И.Ленина. М., 1980. Деп. в ВИНИТИ. №2993 - 80 Деп.

УДК 514.76

О ГЕОМЕТРИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ

$u_{tt} = f(t, x^i, u, u_t, u_j, u_{tk}, u_{k\ell})$

А.К.Р ы б н и к о в

(Московский государственный университет)

Цель настоящей работы - изучение геометрии решений дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f\left(t, x^i, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x^j}, \frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x^k}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^k\,\partial x^\ell}\right). \qquad (1a)$$

В работе построен фундаментальный объект, определяющий геометрию, индуцируемую на произвольном решении уравнения (1a). Построена (при дополнительном условии невырожденности) аффинная связность без кручения, индуцируемая на решении.

1. Геометрия уравнения (1a) понимается как совокупность инвариантов относительно преобразований

$$\tilde t = \tilde t(t), \quad \tilde x^i = \tilde x^i(t, x^1, \dots, x^n), \quad \tilde u = \tilde u(t, x^1, \dots, x^n, u)$$

и соответствующих преобразований частных производных первого и второго порядков (такие преобразования не изменяют вид уравнения (1a)). Переменные $t, x^1, \dots, x^n, u$ рассматриваются как адаптированные локальные координаты $(n+2)$ -мерного расслоения общего типа E с расслоенной $(n+1)$ -мерной базой M, локальными координатами которой являются переменные $t, x^1, \dots, x^n$.

Уравнение (1a) может быть записано в более общем виде

$$\lambda_{00} = f(t, x^1, \dots, x^n, u, \lambda_0, \lambda_i, \lambda_{0k}, \lambda_{k\ell}), \qquad (1)$$

где

$$t, x^i, u, \lambda_{\hat\imath}, \lambda_{\hat k\hat\ell} \quad (\lambda_{\hat k\hat\ell} = \lambda_{\hat\ell\hat k};\ \hat\imath, \hat\jmath, \dots = 0, 1, \dots, n)$$

- адаптированные локальные координаты в многообразии голономных 2-струй [1] локальных сечений расслоения E. При соответствующей специализации выбора локальных координат имеют место равенства

$$\lambda_{\hat\imath} = \frac{\partial u}{\partial x^{\hat\imath}}, \quad \lambda_{\hat k\hat\ell} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^{\hat k}\,\partial x^{\hat\ell}}, \quad x^0 = t.$$

Пусть

$$\omega^{\hat\imath};\ \omega^{n+1};\ \omega^0_0;\ \omega^i_j;\ \omega^{n+1}_{n+1};\ \omega^{n+1}_{\hat\jmath};\ \omega^0_{00};\ \omega^i_{\hat\jmath\hat k};\ \omega^{n+1}_{n+1,n+1};\ \omega^{n+1}_{\hat\jmath,n+1};\ \omega^{n+1}_{\hat\jmath\hat k};\ \dots \qquad (2)$$

- последовательность (симметричных по нижним индексам) структурных форм расслоений голономных реперов многообразия E. Эти формы могут быть выбраны таким образом, чтобы на решении Σ дифференциального уравнения (1) имели место равенства

$$\omega^{n+1} = 0, \quad \omega^{n+1}_{\hat\jmath} = 0, \quad \omega^{n+1}_{\hat\jmath\hat k} = 0, \ \dots \qquad (3)$$

Структурные уравнения, которым удовлетворяют формы (2), включают уравнения

$$\begin{cases} d\omega^0 = \omega^0 \wedge \omega^0_0, \quad d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j + \omega^0 \wedge \omega^i_0, \\ d\omega^{n+1} = \omega^{n+1} \wedge \omega^{n+1}_{n+1} + \omega^j \wedge \omega^{n+1}_j + \omega^0 \wedge \omega^{n+1}_0 \end{cases} \qquad (4)$$

и, кроме того, уравнения, возникающие в процессе правильного продолжения [2] уравнений (4).

Дифференцируя уравнение (1) внешним образом, мы получим соотношение, которое можно записать в виде

$$\omega^{n+1}_{00} = F_0\omega^0 + F_j\omega^j + F\omega^{n+1} + F^0\omega^{n+1}_0 + F^i\omega^{n+1}_i + F^{0j}\omega^{n+1}_{0j} + F^{jk}\omega^{n+1}_{jk}. \qquad (5)$$

На решении Σ имеем $F_{\hat\imath} = 0$, что следует из (5) в силу (3).

Геометрия, индуцируемая на Σ, определяется фундаменталь-