

их с двойными бесконечными точками, с бесконечными точками вхождения одними концами каждого из семейств и связь с особыми точками образа поверхности.

Библиографический список

1. Бакельман И.Я. К теории уравнений Монжа Ампера // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех. 1958. № 1. С. 25-38.
2. Вернер А.Л. О внешней геометрии простейших полных поверхностей неположительной кривизны // Мат. сб. 1968. Т. 75. № 1. С. 112-139.
3. Ефимов Н.В. Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны // Мат. сб. 1964. Т. 64. № 2. С. 286-320.
4. Ефимов Н.В. Поверхности с медленно изменяющейся отрицательной кривизной // Успехи мат. наук. 1966. Т. 21. № 5. С. 3-58.
5. Кантор Б.Е. Правильность в целом сетей на плоскости // Геометрия / ЛГПИ. Л., 1975. Вып. 3. С. 41-51.
6. Розендорн Э.Р. Достаточные условия глобальной правильности сети кривых на евклидовой плоскости // Мат. сб. 1975. Т. 96. № 1. С. 118-134.
7. Розендорн Э.Р. Сети линий, зависящие от параметра, и достаточные условия их сходимости // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1990. Т. 22. С. 3-36.

УДК 514.75

О ДВОЙСТВЕННЫХ ПРОЕКТИВНЫХ СВЯЗНОСТЯХ $\hat{\mathcal{K}}(\Lambda, L)$ -РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

С.Ю. Волкова

(Калининградское ВВМУ)

Для $\hat{\mathcal{K}}(\Lambda, L)$ -распределений [1], [2] во второй дифференциальной окрестности рассмотрен двойственный образ в смысле А.В.Столярова [3], [4]. Для внутренних проективных связностей γ , η , θ , ассоциированных с $\hat{\mathcal{K}}(\Lambda, L)$ -распределением, найдены двойственные относительно инволютивного преобразования ψ

ψ (1.1) проективные связности $\bar{\gamma}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\theta}$. Доказано, что к $\hat{\mathcal{K}}(\Lambda, L)$ -распределению в дифференциальной окрестности порядка $t \geq 2$ его образующего элемента внутренним инвариантным образом присоединяются пространства проективной связности $\bar{P}_{n,n}$; $\bar{P}_{n,e}$; $\bar{P}_{n,n-m-1}$, двойственные соответственно пространствам проективной связности $P_{n,n}$; $P_{n,e}$; $P_{n,n-m-1}$.

Во всей работе используются символы и обозначения работ [1], [2], а также следующая схема индексов:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}, \mathcal{K}, L, \dots &= \overline{1, n}; \quad \bar{\mathcal{I}}, \bar{\mathcal{K}}, \bar{L}, \dots = \overline{0, n}; \quad p, q, s, t = \overline{1, n-1}; \quad i, j, k, l = \overline{n+1, m}; \\ \alpha, \beta, \gamma &= \overline{m+1, n-1}; \quad u, v, w = \overline{n+1, n-1}; \quad p, \sigma, \tau = \overline{1, n-1}; \quad a, b, c, d = (\overline{i, m}; n); \\ \hat{p}, \hat{q}, \hat{s}, \hat{t} &= (\overline{i, n}; n); \quad \hat{u}, \hat{j}, \hat{v}, \hat{l} = (\overline{n+1, m}; n); \quad \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d} = (\overline{i, m}; n); \quad \hat{u}, \hat{v}, \hat{w} = \overline{n+1, n}; \\ \hat{A}, \hat{B}, \hat{C} &= (\overline{1, n}; \overline{m+1, n-1}; n), \quad \bar{p}, \bar{q}, \bar{s} = \overline{0, n}; \quad \bar{u}, \bar{j}, \bar{k} = (0; \overline{n+1, m}); \quad \bar{a}, \bar{b}, \bar{y} = (0; \overline{m+1, n-1}). \end{aligned}$$

§ I. Двойственный образ $\hat{\mathcal{K}}(\Lambda, L)$ -распределения

При изучении регулярных $\hat{\mathcal{K}}(\Lambda, L)$ -распределений проективного пространства применим математический аппарат двойственной теории А.В.Столярова [3], [4]. Введем в рассмотрение систему из $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\bar{\omega}_{\mathcal{X}}^{\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_o^o &= \omega_o^o - \frac{1}{n+1} (\tilde{\Lambda}_{\mathcal{X}} + \tilde{L}_{\mathcal{X}} + \tilde{H}_{\mathcal{X}}) \omega_o^x, \quad \bar{\omega}_o^n = \omega_o^n, \\ \bar{\omega}_o^p &= \omega_o^p + \Lambda^{\alpha p} \Lambda_{q\alpha}^n \omega_o^{\alpha} + \Lambda_n^{\alpha} \Lambda_{qn}^n \omega_o^n, \quad \bar{\omega}_o^i = \omega_o^i + L_n^j L_{j\alpha}^n \omega_o^{\alpha} + L_n^{ji} L_{jn}^n \omega_o^n, \\ \bar{\omega}_o^{\alpha} &= \omega_o^{\alpha} + H_{\beta\alpha}^n H_{\beta\alpha}^n \omega_o^n, \quad \bar{\omega}_n^n = \omega_n^n, \quad \bar{\omega}_p^n = -\Lambda_n^{\alpha p} \omega_q^{\alpha}, \\ \bar{\omega}_n^i &= -L_n^j \omega_i^j, \quad \bar{\omega}_n^{\beta} = -H_{\beta\alpha}^n \omega_{\alpha}^n, \quad \bar{\omega}_p^o = \Lambda_{qp}^n \omega_p^n, \\ \bar{\omega}_n^n &= \omega_n^n - \frac{1}{n+1} (\tilde{\Lambda}_{\mathcal{X}} + \tilde{L}_{\mathcal{X}} + \tilde{H}_{\mathcal{X}}) \omega_o^x, \quad \bar{\omega}_p^i = -\Lambda_{qp}^n L_n^j \omega_j^{\beta}, \\ \bar{\omega}_p^{\alpha} &= -\Lambda_{qp}^n H_{\beta\alpha}^n \omega_p^{\beta}, \quad \bar{\omega}_i^o = L_{ji}^n \omega_n^j, \quad \bar{\omega}_p^n = -\Lambda_{qp}^n \omega_p^n, \quad (I.1) \\ \bar{\omega}_p^f &= \omega_p^f + \Lambda_{pq}^f \Lambda_{q\alpha}^n \omega_o^{\alpha} - \frac{1}{n+1} \delta_p^f (\tilde{\Lambda}_{\mathcal{X}} + \tilde{L}_{\mathcal{X}} + \tilde{H}_{\mathcal{X}}) \omega_o^x, \\ \bar{\omega}_i^l &= \omega_i^l + L_n^j L_{ji}^n \omega_o^x - \frac{1}{n+1} \delta_i^l (\tilde{\Lambda}_{\mathcal{X}} + \tilde{L}_{\mathcal{X}} + \tilde{H}_{\mathcal{X}}) \omega_o^x, \\ \bar{\omega}_i^{\alpha} &= -L_{ij}^n \Lambda_{j\alpha}^n \omega_q^{\beta}, \quad \bar{\omega}_i^o = -L_{ji}^n H_{\beta\alpha}^n \omega_p^{\beta}, \\ \bar{\omega}_i^n &= -L_{ji}^n \omega_n^j, \quad \bar{\omega}_{\alpha}^o = H_{\beta\alpha}^n \omega_p^{\beta}, \quad \bar{\omega}_{\alpha}^i = -L_n^j H_{\beta\alpha}^n \omega_j^{\beta}, \\ \bar{\omega}_{\alpha}^p &= -\Lambda_n^{\alpha p} H_{\beta\alpha}^n \omega_q^{\beta}, \quad \bar{\omega}_{\alpha}^n = -H_{\beta\alpha}^n \omega_p^{\beta}, \\ \bar{\omega}_{\alpha}^{\beta} &= \omega_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{n+1} \delta_{\alpha}^{\beta} (\tilde{\Lambda}_{\mathcal{X}} + \tilde{L}_{\mathcal{X}} + \tilde{H}_{\mathcal{X}}) \omega_o^x + H_n^{\beta\gamma} H_{\gamma\alpha}^n \omega_o^x. \end{aligned}$$

Формы $\bar{\omega}_{\bar{x}}$ удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства и задают инфинитезимальные перемещения тангенциального репера $\{\tau_{\bar{x}}\}$:

$$d\tau_{\bar{x}} = \bar{\omega}_{\bar{x}} \tau_{\bar{x}},$$

где

$$\begin{cases} \tau_0 = \rho [A_0, A_p, A_i, A_\alpha], & \tau_h = \rho [A_h, A_p, A_i, A_\alpha], \\ \tau_p = \rho \sum_q \Lambda_{qp}^n [A_0, A_1, \dots, A_{q-1}, A_n, A_{q+1}, \dots, A_z; A_i, A_\alpha], & (I.2) \\ \tau_i = \rho \sum_j M_{ji}^n [A_0, A_p, A_{z+1}, \dots, A_{j-1}, A_n, A_{j+1}, \dots, A_m, A_\alpha], \\ \tau_\alpha = \rho \sum_g H_{\alpha g}^n [A_0, A_i, A_p, A_{m+1}, \dots, A_{g-1}, A_n, A_{g+1}, \dots, A_{n-1}], \end{cases}$$

где $\rho = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \cdot M \cdot H}}$.

Докажем, что преобразование $\psi: \bar{\omega}_{\bar{x}} \rightarrow \bar{\omega}_{\bar{x}}$ форм проективного пространства по закону (I.1) является инволютивным, т.е. $\psi = \psi^{-1}$. В силу соотношений (I.1) из формул

$$\bar{\omega}_p^n = \bar{L}_{px}^n \bar{\omega}_o^n, \quad \bar{\omega}_i^n = \bar{L}_{ix}^n \bar{\omega}_o^n, \quad \bar{\omega}_\alpha^n = \bar{H}_{\alpha p}^n \bar{\omega}_o^p$$

находим

$$\bar{\Lambda}_{pq}^n = -\Lambda_{qp}^n, \quad \bar{L}_{ij}^n = -L_{ji}^n, \quad \bar{H}_{\alpha p}^n = -H_{p\alpha}^n,$$

$$\bar{L}_{ip}^n = 0, \quad \bar{\Lambda}_{pj}^n = 0, \quad \bar{H}_{\alpha p}^n = 0, \quad \bar{H}_{\alpha j}^n = 0,$$

$$\begin{cases} \bar{\Lambda}_{p\alpha}^n = \Lambda_{p\alpha}^n, & \bar{\Lambda}_{pn}^n = \Lambda_{pn}^n - \Lambda_{p\alpha}^n H_{\alpha n}^n H_{pn}^n, \quad \bar{L}_{ia}^n = L_{ia}^n, \\ \bar{L}_{in}^n = L_{in}^n - L_{id}^n H_{dn}^n H_{pn}^n, & \bar{H}_{\alpha n}^n = H_{\alpha n}^n. \end{cases}$$

Далее, используя формулы [4, (I.15)] и (I.4), имеем

$$\bar{\Lambda}_n^p = -\Lambda_n^p, \quad \bar{L}_n^i = -L_n^i, \quad \bar{H}_n^{\alpha p} = -H_n^{\alpha p}.$$

Из дифференциальных уравнений [4, (I.5)]:

$$\begin{cases} \nabla \bar{\Lambda}_{pq}^n + \bar{\Lambda}_{pq}^n \bar{\omega}_o^n = \bar{\Lambda}_{pqx}^n \bar{\omega}_o^x, & \nabla \bar{L}_{ij}^n + \bar{L}_{ij}^n \bar{\omega}_o^n = \bar{L}_{ijk}^n \bar{\omega}_o^x, \\ \nabla \bar{H}_{\alpha p}^n + \bar{H}_{\alpha p}^n \bar{\omega}_o^n = \bar{H}_{\alpha px}^n \bar{\omega}_o^x, \end{cases}$$

записанных относительно преобразования ψ (I.1) с учетом формул (I.1), (I.4), соответственно получаем

$$\begin{cases} \bar{\Lambda}_{pq}^n = \Lambda_{tp}^n \Lambda_{tq}^n \Lambda_{qs}^n, & \bar{\Lambda}_{pq}^n = \Lambda_{tp}^n \Lambda_{tq}^n \Lambda_{qs}^n, \\ \bar{\Lambda}_{pqx}^n = \Lambda_{tp}^n \Lambda_{tq}^n \Lambda_{qs}^n - \bar{\Lambda}_{pq}^n \Lambda_{tq}^n \Lambda_{qs}^n - \bar{\Lambda}_{pq}^n L_{tn}^i L_{kn}^n, & (I.9) \\ \bar{\Lambda}_{pqn}^n = \Lambda_{tp}^n \Lambda_{tq}^n \Lambda_{qs}^n - \bar{\Lambda}_{pq}^n \Lambda_{tq}^n \Lambda_{qs}^n - \bar{\Lambda}_{pq}^n L_{tn}^i L_{kn}^n - \bar{\Lambda}_{pq}^n H_{nq}^n H_{pn}^n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{L}_{ijp}^n = L_{ki}^n L_{kj}^n L_{ip}^n, & \bar{L}_{ijk}^n = L_{ki}^n L_{kj}^n L_{ik}^n, \\ \bar{L}_{ij\alpha}^n = L_{ki}^n L_{kj}^n L_{i\alpha}^n - \bar{L}_{ij}^n L_{ki}^n L_{ex}^n - \bar{L}_{ijp}^n \Lambda_{nq}^n \Lambda_{\alpha q}^n, \\ \bar{L}_{ijn}^n = L_{ki}^n L_{kj}^n L_{in}^n - \bar{L}_{ij}^n L_{ki}^n L_{en}^n - \bar{L}_{ijp}^n \Lambda_{nq}^n \Lambda_{qn}^n - \bar{L}_{ijx}^n H_{nq}^n H_{pn}^n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{H}_{\alpha p\beta}^n = H_{\alpha q}^n H_{nq}^n H_{\beta p}^n, & \bar{H}_{\alpha p}^n = H_{\alpha q}^n H_{nq}^n H_{\beta p}^n, \\ \bar{H}_{\alpha p\gamma}^n = H_{\alpha q}^n H_{nq}^n H_{\beta p}^n - \bar{H}_{\alpha p}^n L_{ij}^n L_{j\beta}^n - \bar{H}_{\alpha p}^n \Lambda_{nq}^n \Lambda_{q\beta}^n, \\ \bar{H}_{\alpha p\eta}^n = H_{\alpha q}^n H_{nq}^n H_{\beta p}^n - \bar{H}_{\alpha p}^n \Lambda_{nq}^n \Lambda_{qn}^n - \bar{H}_{\alpha p}^n L_{ij}^n L_{jn}^n - \bar{H}_{\alpha p\gamma}^n H_{nq}^n H_{\beta n}^n. \end{cases}$$

Теперь из соотношений [1, (2.14)]:

$$\bar{\Lambda}_x = \bar{\Lambda}_n^p \bar{\Lambda}_{px}, \quad \bar{L}_x = \bar{L}_n^{ic} \bar{L}_{ix}, \quad \bar{H}_x = \bar{H}_n^{\alpha x} \bar{H}_{\alpha x}, \quad (I.12)$$

заданных относительно репера $(\tau^{\bar{x}})$, с использованием формул (I.4) – (I.7), (I.9) – (I.11) приходим соответственно к следующим соотношениям:

$$\begin{cases} \bar{\Lambda}_a = -\Lambda_a, & \bar{\Lambda}_\alpha = -\Lambda_\alpha + \bar{\Lambda}_p \Lambda_{nq}^n \Lambda_{q\alpha}^n + \bar{L}_i L_{kn}^n L_{ka}^n, \\ \bar{\Lambda}_h = -\Lambda_h + \bar{\Lambda}_p \Lambda_{nq}^n \Lambda_{qn}^n + \bar{\Lambda}_\alpha H_{nq}^n H_{qn}^n + \bar{L}_i L_{kn}^n L_{kn}^n - \end{cases}$$

$$-\bar{\Lambda}_p \Lambda_{nq}^n \Lambda_{qn}^n H_{nq}^n H_{qn}^n - \bar{L}_i L_{kn}^n L_{ka}^n H_{nq}^n H_{qn}^n;$$

$$\begin{cases} \bar{L}_a = -\bar{L}_a, & \bar{L}_\alpha = -\bar{L}_\alpha + \bar{\Lambda}_p \Lambda_{nq}^n \Lambda_{qn}^n + \bar{L}_i L_{kn}^n L_{kn}^n, \\ \bar{L}_h = -\bar{L}_h + \bar{\Lambda}_p \Lambda_{nq}^n \Lambda_{qn}^n + \bar{\Lambda}_\alpha H_{nq}^n H_{qn}^n + \bar{L}_i L_{kn}^n \Lambda_{kn}^n - \end{cases}$$

$$-\bar{\Lambda}_p \Lambda_{nq}^n \Lambda_{qn}^n H_{nq}^n H_{qn}^n - \bar{L}_i L_{kn}^n L_{ka}^n H_{nq}^n H_{qn}^n;$$

$$\begin{cases} \bar{H}_a = -\bar{H}_a, & \bar{H}_\alpha = -\bar{H}_\alpha + \bar{H}_i L_{jn}^n L_{j\alpha}^n + \bar{H}_p \Lambda_{nq}^n \Lambda_{q\alpha}^n, \\ \bar{H}_h = -\bar{H}_h + \bar{H}_\alpha H_{nq}^n H_{qn}^n - \bar{H}_i L_{jn}^n L_{j\alpha}^n H_{nq}^n H_{qn}^n + \bar{H}_p \Lambda_{nq}^n \Lambda_{qn}^n + \end{cases}$$

$$+\bar{H}_i \Lambda_{kn}^n \Lambda_{kn}^n - \bar{H}_p \Lambda_{nq}^n \Lambda_{qn}^n H_{nq}^n H_{qn}^n.$$

Наконец, из формул (I.1) в силу (I.3) – (I.15) получаем соотношения, определяющие преобразование $\psi^{-1}: \bar{\omega}_{\bar{x}} \rightarrow \bar{\omega}_{\bar{x}}$. Преобразование ψ^{-1} имеет следующий вид:

$$\omega_o^0 = \bar{\omega}_o^0 - \frac{1}{n+1} (\bar{\Lambda}_x + \bar{L}_x + \bar{H}_x) \bar{\omega}_o^x, \quad \omega_o^n = \bar{\omega}_o^n, \quad \omega_h^n = \bar{\omega}_h^n,$$

$$\omega_o^p = \bar{\omega}_o^p + \bar{\Lambda}_n^p \bar{\Lambda}_{q\alpha}^n \bar{\omega}_o^\alpha + \bar{\Lambda}_n^p \bar{\Lambda}_{qn}^n \bar{\omega}_o^n, \quad \omega_o^i = \bar{\omega}_o^i + \bar{L}_{in}^i \bar{L}_{jd}^n \bar{\omega}_o^\alpha + \bar{L}_{in}^i \bar{L}_{jn}^n \bar{\omega}_o^n,$$

$$\omega_o^\alpha = \bar{\omega}_o^\alpha + \bar{H}_{nq}^n \bar{H}_{qn}^n \bar{\omega}_o^n, \quad \omega_h^n = -\bar{\Lambda}_n^p \bar{\omega}_q^p, \quad \omega_h^i = -\bar{L}_n^{ic} \bar{\omega}_i^0,$$

$$\omega_h^p = -\bar{H}_{nq}^n \bar{\omega}_q^p, \quad \omega_p^0 = \bar{\Lambda}_{qp}^n \bar{\omega}_h^q, \quad \omega_p^i = -\bar{\Lambda}_{qp}^n \bar{L}_{in}^i \bar{\omega}_j^q,$$

$$\omega_h^n = \bar{\omega}_h^n - \frac{1}{n+1} (\bar{\Lambda}_x + \bar{L}_x + \bar{H}_x) \bar{\omega}_o^x, \quad \omega_p^\alpha = -\bar{\Lambda}_{qp}^n \bar{H}_{nq}^n \bar{\omega}_p^\alpha,$$

$$\omega_i^o = \bar{L}_{ji}^n \bar{\omega}_k^j, \quad \omega_p^o = -\bar{\Lambda}_{qp}^n \bar{\omega}_o^q, \quad \omega_i^p = -\bar{L}_{ij}^n \bar{\Lambda}_k^n \bar{\omega}_o^j. \quad (I.16)$$

$$\omega_p^t = \bar{\omega}_p^t + \bar{\Lambda}_{qp}^n \bar{\Lambda}_k^n \bar{\omega}_o^x - \frac{1}{n+1} \delta_p^t (\bar{\Lambda}_x + \bar{L}_x + \bar{H}_x) \bar{\omega}_o^x,$$

$$\omega_i^t = \bar{\omega}_i^t + \bar{L}_{ji}^n \bar{\Lambda}_k^n \bar{\omega}_o^x - \frac{1}{n+1} \delta_i^t (\bar{\Lambda}_x + \bar{L}_x + \bar{H}_x) \bar{\omega}_o^x,$$

$$\omega_a^o = -\bar{L}_{ji}^n \bar{H}_{\beta\alpha}^q \bar{\omega}_j^q, \quad \omega_i^o = -\bar{L}_{ji}^n \bar{\omega}_o^j, \quad \omega_a^o = \bar{H}_{\beta\alpha}^n \bar{\omega}_o^q,$$

$$\omega_a^i = -\bar{L}_{ij}^n \bar{H}_{\beta\alpha}^n \bar{\omega}_j^q, \quad \omega_a^i = -\bar{\Lambda}_{pq}^n \bar{H}_{\beta\alpha}^n \bar{\omega}_q^p, \quad \omega_a^i = -\bar{H}_{\beta\alpha}^n \bar{\omega}_o^q.$$

$$\omega_a^o = \bar{\omega}_a^o - \frac{1}{n+1} \delta_a^o (\bar{\Lambda}_x + \bar{L}_x + \bar{H}_x) \bar{\omega}_o^x + \bar{H}_n^y \bar{H}_{yx}^n \bar{\omega}_o^x.$$

Итак, из формул (I.1) и (I.16) следует, что $\psi \equiv \psi^{-1}$. В результате приходим к следующему предложению.

Теорема I. Регулярное $\hat{\mathcal{K}}(\Lambda, L)$ -распределение во второй дифференциальной окрестности его образующего элемента индуцирует проективное пространство \bar{P}_n , двойственное исходному проективному пространству P_n относительно инволютивного преобразования ψ форм ω_x^q по закону (I.1).

Дифференциальные уравнения регулярного распределения $\hat{\mathcal{K}}(\Lambda, L) \subset \bar{P}_n$, двойственного данному регулярному распределению $\hat{\mathcal{K}}(\Lambda, L) \subset P_n$, в силу теоремы 1 имеют аналогичный вид [1, (I.2)-(I.6)] (здесь не выписываются соответствующие замыкания):

$$\begin{cases} \bar{\omega}_p^n = \bar{\Lambda}_{pk}^n \bar{\omega}_o^k = \bar{M}_{pk}^n \bar{\omega}_o^k = \bar{H}_{pk}^n \bar{\omega}_o^k, & \bar{\omega}_i^n = \bar{L}_{ik}^n \bar{\omega}_o^k = \bar{M}_{ik}^n \bar{\omega}_o^k = \bar{H}_{ik}^n \bar{\omega}_o^k, \\ \bar{\omega}_p^a = \bar{\Lambda}_{pk}^a \bar{\omega}_o^k = \bar{M}_{pk}^a \bar{\omega}_o^k, & \bar{\omega}_i^a = \bar{L}_{ik}^a \bar{\omega}_o^k = \bar{M}_{ik}^a \bar{\omega}_o^k, \\ \bar{\omega}_p^i = \bar{\Lambda}_{pk}^i \bar{\omega}_o^k, & \bar{\omega}_i^p = \bar{L}_{ik}^p \bar{\omega}_o^k, \\ \bar{\omega}_a^p = \bar{H}_{ak}^p \bar{\omega}_o^k, & \bar{\omega}_a^n = \bar{H}_{ak}^n \bar{\omega}_o^p, \quad \bar{\omega}_a^i = \bar{H}_{ak}^i \bar{\omega}_o^k, \end{cases} \quad (I.17)$$

($\bar{L}_{ip}^n = 0$, $\bar{\Lambda}_{pj}^n = 0$, $\bar{H}_{ap}^n = 0$, $\bar{H}_{aj}^n = 0$).

Все построения работ [1], [2] полностью переносятся для двойственного образа $\hat{\mathcal{K}}(\Lambda, L) \subset \bar{P}_n$. Например, покажем, что каждая из систем функций

$$\begin{cases} \bar{Y}_n^p \stackrel{\text{def}}{=} -\bar{\Lambda}_{np}^q Y_q^o, & \bar{Y}_p^o = \bar{\Lambda}_{qp}^n Y_n^q, \quad \bar{Y}_n^i = -\bar{L}_{ik}^n Y_k^o, \\ \bar{Y}_i^o = \bar{L}_{ki}^n Y_k^o, & \bar{Y}_a^o = -\bar{H}_{ap}^n Y_p^o, \quad \bar{Y}_a^p = \bar{H}_{\beta\alpha}^n Y_\alpha^p \end{cases} \quad (I.18)$$

образует квазитензор $\hat{\mathcal{K}}(\Lambda, L)$ -распределения, двойственный соответствующему квазитензору $\hat{\mathcal{K}}(\Lambda, L)$ -распределения относительно преобразования ψ (I.1). Действительно, дифференцируя (I.18) и учитывая формулы [1, (I.5), (I.15), (2.19), (2.23)], приходим соответственно к следующим дифференциальным уравнениям, которым удовлетворяют функции (I.18):

$$\begin{cases} \nabla \bar{Y}_n^p + \bar{\omega}_p^o = \bar{Y}_{nk}^p \bar{\omega}_k^o, & \nabla \bar{Y}_p^o + \bar{\omega}_p^o = \bar{Y}_{pk}^o \bar{\omega}_k^o, \quad \nabla \bar{Y}_n^i + \bar{\omega}_n^i = \bar{Y}_{ik}^i \bar{\omega}_k^o, \\ \nabla \bar{Y}_i^o + \bar{\omega}_i^o = \bar{Y}_{ik}^o \bar{\omega}_k^o, & \nabla \bar{Y}_a^o + \bar{\omega}_a^o = \bar{Y}_{ak}^o \bar{\omega}_k^o, \quad \nabla \bar{Y}_a^p + \bar{\omega}_a^p = \bar{Y}_{\beta\alpha}^p \bar{\omega}_\alpha^o. \end{cases} \quad (I.19)$$

Таким образом, всякая нормализация $\hat{\mathcal{K}}(\Lambda, L)$ -распределения индуцирует его двойственную нормализацию. При этом оснащающие объекты связаны соотношениями (I.18).

Следуя работе [3], утверждаем, что, зная закон охвата нормали I-го (2-го) рода в смысле А.П.Нордена $\hat{\mathcal{K}}(\Lambda, L) \subset P_n$, можно построить внутренним образом определенную нормаль 2-го (1-го) рода распределения $\hat{\mathcal{K}}(\Lambda, L) \subset \bar{P}_n$, используя при этом двойственную его теорию. Действительно, строим охват квазитензора $\{\bar{Y}_\sigma^o\} \{\bar{Y}_\sigma^o\}$ ($\sigma = i, a, p$) двойственного образа $\hat{\mathcal{K}}(\Lambda, L) \subset \bar{P}_n$, аналогичный охвату квазитензора $\{Y_\sigma^o\} \{Y_\sigma^o\}$ распределения $\hat{\mathcal{K}}(\Lambda, L) \subset P_n$. После чего по закону (I.18) находим соответствующую нормаль $\{Y_\sigma^o\} \{Y_\sigma^o\}$.

§ 2. Двойственные проективные связности регулярного распределения $\hat{\mathcal{K}}(\Lambda, L) \subset P_n$

I. Рассмотрим пространство проективной структуры $P_{n,\tau}$, n -мерной базой которого является точечное проективное пространство P_n , а слоями – плоскости $\Pi_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda$ (τ -мерные центропроективные пространства), т.е. τ -мерные линейные элементы базисного распределения $\mathcal{K}_\tau \subset \hat{\mathcal{K}}(\Lambda, L)$ [1].

Проективную связность γ пространства $P_{n,\tau}$ определим при помощи системы форм $\bar{\omega}_{\bar{q}}^{\bar{p}} = \omega_{\bar{q}}^{\bar{p}} - \bar{Y}_{\bar{q}\bar{k}}^{\bar{p}} \omega_{\bar{k}}^{\bar{o}}$, удовлетворяющих структурным уравнениям [5], [6]:

$$\mathcal{D} \bar{\omega}_{\bar{q}}^{\bar{p}} = \bar{\omega}_{\bar{q}}^{\bar{s}} \wedge \bar{\omega}_{\bar{s}}^{\bar{p}} + \omega_{\bar{o}}^{\bar{l}} \wedge \Delta \bar{Y}_{\bar{q}\bar{k}}^{\bar{l}}, \quad \mathcal{D} \bar{Y}_{\bar{q}\bar{k}}^{\bar{l}} = \omega_{\bar{o}}^{\bar{l}} \wedge \omega_{\bar{k}}^{\bar{o}} + \omega_{\bar{o}}^{\bar{l}} \wedge \omega_{\bar{q}}^{\bar{o}}, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \bar{Y}_{\bar{q}\bar{k}}^{\bar{l}} = & d \bar{Y}_{\bar{q}\bar{k}}^{\bar{l}} - \bar{Y}_{\bar{s}\bar{k}}^{\bar{l}} \omega_{\bar{q}}^{\bar{s}} + \bar{Y}_{\bar{q}\bar{k}}^{\bar{s}} \omega_{\bar{s}}^{\bar{l}} - \bar{Y}_{\bar{q}\bar{l}}^{\bar{s}} \omega_{\bar{s}}^{\bar{k}} + \bar{Y}_{\bar{q}\bar{k}}^{\bar{s}} \omega_{\bar{o}}^{\bar{o}} + \Lambda_{\bar{q}\bar{k}}^{\bar{s}} \omega_{\bar{s}}^{\bar{l}} + \\ & + \Lambda_{\bar{q}\bar{k}}^{\bar{i}} \omega_{\bar{i}}^{\bar{l}} + \Lambda_{\bar{q}\bar{k}}^{\bar{n}} \omega_{\bar{n}}^{\bar{l}} - \Gamma_{\bar{s}\bar{l}}^{\bar{p}} \Gamma_{\bar{q}\bar{k}}^{\bar{s}} \omega_{\bar{o}}^{\bar{l}} \quad (\Lambda_{\bar{o}\bar{k}}^{\bar{l}} = \delta_{\bar{o}}^{\bar{l}}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Формы $\bar{\omega}_{\bar{q}}^{\bar{p}}$ определяют проективную связность в слоях (плоскостях Π_τ распределения \mathcal{K}_τ) пространства $P_{n,\tau}$ [5], [6] тогда и только тогда, когда

$$\Delta \bar{Y}_{\bar{q}\bar{k}}^{\bar{l}} = \bar{Y}_{\bar{q}\bar{k}\bar{l}}^{\bar{l}} \omega_{\bar{o}}^{\bar{l}}. \quad (2.3)$$

Совокупность величин $\bar{Y}_{\bar{q}\bar{k}\bar{l}}^{\bar{l}}$, следуя работе [6], назовем объектом проективной связности пространства $P_{n,\tau}$.

Структурные уравнения для слоевых форм $\bar{\omega}_{\bar{q}}^{\bar{p}}$ пространства $P_{n,\tau}$ имеют вид

$$\mathcal{D} \bar{\omega}_{\bar{q}}^{\bar{p}} = \bar{\omega}_{\bar{q}}^{\bar{s}} \wedge \bar{\omega}_{\bar{s}}^{\bar{p}} + \frac{1}{2} \bar{R}_{\bar{q}\bar{k}\bar{l}}^{\bar{p}} \omega_{\bar{k}}^{\bar{l}} \wedge \omega_{\bar{o}}^{\bar{o}}, \quad (2.4)$$

где совокупность величин

$$R_{\bar{q}kL}^{\bar{p}} = 2 \gamma_{\bar{q}kL}^{\bar{p}} \quad (2.5)$$

является тензором кручения-кривизны проективной связности γ пространства $P_{n,e}$.

Охват компонент объекта проективной связности $\gamma = \{\gamma_{\bar{q}k}^{\bar{p}}\}$ можно осуществить с помощью функций

$$\begin{cases} \gamma_{00}^p = 0, \quad \gamma_{0k}^p = \gamma_k^p, \quad \gamma_{0p}^0 = 0, \quad \gamma_{0i}^0 = -L_i^0, \quad \gamma_{0\alpha}^0 = -H_\alpha^0, \quad \gamma_{0n}^0 = \gamma_n^0, \\ \gamma_{\bar{q}k}^p = \gamma_n^p \Lambda_{qk}^n \delta_x^n + \gamma_n^p \Lambda_{qk}^n \delta_x^2, \quad \gamma_{\bar{q}k}^0 = \gamma_n^0 \Lambda_{qk}^n - H_\alpha^0 \Lambda_{qk}^\alpha - L_i^0 \Lambda_{qk}^i, \end{cases} \quad (2.6)$$

которые удовлетворяют уравнениям (2.3). Слоевые формы $\hat{\omega}_{\bar{q}}^{\bar{x}}$ пространства проективной связности $P_{n,e}$, внутренне присоединенного к распределению $\mathcal{X}_e \subset \mathcal{K}(A,L)$, имеют вид

$$\begin{cases} \hat{\omega}_0^0 = \omega_0^0 - (\gamma_n^0 \delta_x^n - L_i^0 \delta_x^i - H_\alpha^0 \delta_x^\alpha) \omega_o^x, \\ \hat{\omega}_0^p = \omega_0^p - \gamma_n^p \delta_x^n \omega_o^x, \quad \hat{\omega}_q^p = \omega_q^p - \Lambda_{qk}^n \gamma_n^p \omega_o^x, \\ \hat{\omega}_q^0 = \omega_q^0 - (\gamma_n^0 \Lambda_{qk}^n - H_\alpha^0 \Lambda_{qk}^\alpha - L_i^0 \Lambda_{qk}^i) \omega_o^x \end{cases} \quad (2.7)$$

и удовлетворяют уравнениям (2.4). Можно показать, следуя работе [6], что построенная внутренняя проективная связность γ геометрически определена путем проектирования при помощи оснащающей по Картану плоскости $\mathcal{K}_{n-m-1}(\gamma_n^p)(A_0) = [\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_n]$ [2, (2.5), (2.3)].

2. Рассмотрим пространство проективной структуры $P_{n,e}$,

n -мерной базой которого является точечное проективное пространство P_n , а слоями – плоскости $\Pi_e = \mathcal{L}$ (ℓ -мерные центропроективные пространства) [1]. Определим проективную связность γ пространства $P_{n,e}$ при помощи системы форм $\{\theta_j^{\bar{t}}\}$:

$$\hat{\theta}_j^{\bar{t}} = \omega_j^{\bar{t}} - \eta_{jk}^{\bar{t}} \omega_o^x, \quad (2.8)$$

удовлетворяющих структурным уравнениям

$$\Delta \hat{\theta}_j^{\bar{t}} = \hat{\theta}_{\bar{j}}^{\bar{t}} \wedge \hat{\theta}_e^{\bar{t}} + \omega_o^x \wedge \Delta \eta_{jk}^{\bar{t}}, \quad \Delta \omega_o^{\bar{l}} = \omega_o^l \wedge \omega_o^{\bar{l}} + \omega_o^0 \wedge \omega_o^{\bar{l}}, \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \eta_{jk}^{\bar{t}} = & d \eta_{jk}^{\bar{t}} - \eta_{ek}^{\bar{t}} \omega_j^{\bar{t}} + \eta_{jk}^{\bar{t}} \omega_e^{\bar{t}} - \eta_{jl}^{\bar{t}} \omega_k^{\bar{l}} + \eta_{jk}^{\bar{t}} \omega_o^0 + L_{jk}^{\bar{t}} \omega_x^{\bar{t}} + \\ & + L_{jk}^{\bar{t}} \omega_p^{\bar{t}} - \eta_{el}^{\bar{t}} \eta_{jk}^{\bar{t}} \omega_o^l \quad (\Lambda_{ok}^{\bar{t}} = \delta_x^{\bar{t}}, \quad \Lambda_{ox}^{\bar{t}} = \delta_x^{\bar{t}}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для того, чтобы формы $\hat{\theta}_j^{\bar{t}}$ определяли проективную связность γ в слоях распределения $\mathcal{X}_e \subset P_{n,e}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дифференциальные уравнения

$$\Delta \eta_{jk}^{\bar{t}} = \eta_{jkL}^{\bar{t}} \omega_o^L. \quad (2.11)$$

Нетрудно убедиться, что уравнения (2.11) удовлетворяются, если

ли в качестве компонент объекта проективной связности $\gamma = \{\gamma_{\bar{q}k}^{\bar{p}}\}$ взять следующие функции:

$$\begin{cases} \gamma_{0k}^p = \gamma_n^p \delta_x^n, \quad \gamma_{0k}^0 = \varphi_n^0 \delta_x^n - \hat{H}_\alpha^0 \delta_x^\alpha - L_p^0 \delta_x^p, \\ \gamma_{jk}^0 = \varphi_n^0 L_{jk}^n - \hat{H}_\alpha^0 L_{jk}^\alpha - L_p^0 L_{jk}^p, \quad \gamma_{jk}^i = \Lambda_{jk}^n \gamma_n^i. \end{cases} \quad (2.12)$$

Таким образом, слоевые формы $\hat{\theta}_j^{\bar{t}}$ пространства проективной связности $P_{n,e}$, внутренне определенного распределением $\mathcal{K}(A,L)$, принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_0^0 = \omega_0^0 - (\varphi_n^0 \delta_x^n - \hat{H}_\alpha^0 \delta_x^\alpha - L_p^0 \delta_x^p) \omega_o^x, \\ \hat{\theta}_0^i = \omega_0^i - \gamma_n^i \delta_x^n \omega_o^x, \quad \hat{\theta}_j^i = \omega_j^i - \Lambda_{jk}^n \gamma_n^i \omega_o^x, \\ \hat{\theta}_j^0 = \omega_j^0 - (\varphi_n^0 L_{jk}^n - \hat{H}_\alpha^0 L_{jk}^\alpha - L_p^0 L_{jk}^p) \omega_o^x \end{cases} \quad (2.13)$$

и удовлетворяют структурным уравнениям

$$\Delta \hat{\theta}_j^{\bar{t}} = \hat{\theta}_{\bar{j}}^{\bar{t}} \wedge \hat{\theta}_e^{\bar{t}} + \frac{1}{2} \tau_{jkL}^{\bar{t}} \omega_o^x \wedge \omega_o^L \quad (\tau_{jkL}^{\bar{t}} = 2 \eta_{jkL}^{\bar{t}}). \quad (2.14)$$

Внутренняя проективная связность γ в слоях \mathcal{L} -распределения определена путем проектирования при помощи оснащающей по Картану плоскости $\mathcal{K}_{n-m-1}(\gamma_n^p)(A_0)$ [2, (2.6), (2.7)].

3. Наконец, рассмотрим пространство проективной структуры $P_{n,n-m-1}$, n -мерной базой которого является точечное проективное пространство P_n , а слоями – центропроективные $(n-m-1)$ -мерные пространства (плоскости \mathcal{K}_{n-m-1}) – характеристики соответствующих $(n-1)$ -мерных линейных элементов оснащающего распределения $\mathcal{K}_{n-1} \subset \mathcal{K}(A,L)$. Проективную связность ψ пространства $P_{n,n-m-1}$ определим при помощи системы форм $\{\psi_{\bar{p}}^{\bar{x}}\}$:

$$\psi_{\bar{p}}^{\bar{x}} = \omega_{\bar{p}}^{\bar{x}} - \Gamma_{\bar{p}k}^{\bar{x}} \omega_o^x, \quad (2.15)$$

удовлетворяющих структурным уравнениям [5], [6]:

$$\Delta \psi_{\bar{p}}^{\bar{x}} = \psi_{\bar{p}}^{\bar{y}} \wedge \psi_{\bar{y}}^{\bar{x}} + \omega_o^x \wedge \Delta \Gamma_{\bar{p}k}^{\bar{x}}, \quad (2.16)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma_{\bar{p}k}^{\bar{x}} = & d \Gamma_{\bar{p}k}^{\bar{x}} - \Gamma_{\bar{p}k}^{\bar{x}} \omega_o^l - \Gamma_{\bar{p}k}^{\bar{x}} \omega_{\bar{p}}^{\bar{y}} + \Gamma_{\bar{p}k}^{\bar{x}} \omega_{\bar{y}}^{\bar{x}} + \Gamma_{\bar{p}k}^{\bar{x}} \omega_o^0 + \\ & + H_{\bar{p}k}^{\bar{a}} \omega_{\bar{a}}^{\bar{x}} - \Gamma_{\bar{p}k}^{\bar{x}} \Gamma_{\bar{p}k}^{\bar{a}} \omega_o^l, \quad H_{\bar{p}k}^{\bar{a}} = \delta_{\bar{p}k}^{\bar{a}}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Совокупность функций $\{\Gamma_{\bar{p}k}^{\bar{x}}\}$, удовлетворяющих уравнениям

$$\Delta \Gamma_{\bar{p}k}^{\bar{x}} = \psi_{\bar{p}kL}^{\bar{x}} \omega_o^L, \quad (2.18)$$

назовем [6] объектом проективной связности пространства $P_{n,n-m-1}$.

Структурные уравнения для слоевых форм $\psi_{\bar{p}}^{\bar{x}}$ пространства проективной связности $P_{n,n-m-1}$ имеют вид

$$\begin{aligned} R_{\bar{p}kL}^{\bar{x}} = & 2 \Gamma_{\bar{p}kL}^{\bar{x}} + \frac{1}{2} R_{\bar{p}kL}^{\bar{x}} \omega_o^x \wedge \omega_o^L, \\ \text{где } R_{\bar{p}kL}^{\bar{x}} = & 2 \Gamma_{\bar{p}kL}^{\bar{x}} - \text{тензор кручения-кривизны.} \end{aligned}$$

объекта проективной связности $\Gamma = \{\Gamma_{\beta_k}^{\alpha}\}$ осуществляем по формулам

$$\begin{cases} \Gamma_{\alpha_k}^{\alpha} = \gamma_k^n \delta_k^n, & \Gamma_{\alpha_k}^{\circ} = \psi_k^n \delta_k^n - l_i^n \delta_x^i - l_p^n \delta_k^p, \\ \Gamma_{\beta_k}^{\alpha} = \gamma_k^n H_{\beta_k}^n, & \Gamma_{\alpha_k}^{\circ} = \psi_k^n H_{\alpha_k}^n - l_i^n H_{\alpha_k}^i - l_p^n H_{\alpha_k}^p. \end{cases} \quad (2.19)$$

Тогда слоевые формы (2.15) в силу (2.19) примут окончательно следующий вид:

$$\begin{cases} \mathcal{V}_o^{\circ} = \omega_o^{\circ} - (\psi_k^n \delta_k^n - l_i^n \delta_x^i - l_p^n \delta_k^p) \omega_o^x, \\ \mathcal{V}_o^{\alpha} = \omega_o^{\alpha} - \gamma_k^n \delta_k^n \omega_o^x, \quad \mathcal{V}_p^{\alpha} = \omega_p^{\alpha} - \gamma_k^n H_{\beta_k}^n \omega_o^x, \\ \mathcal{V}_{\alpha}^{\alpha} = \omega_{\alpha}^{\alpha} - (\psi_k^n H_{\alpha_k}^n - l_i^n H_{\alpha_k}^i - l_p^n H_{\alpha_k}^p) \omega_o^x. \end{cases} \quad (2.20)$$

Доказано, что проективная связность Γ определена путем проектирования при помощи внутренне определенной оснащающей по Э.Картану плоскости $\mathcal{H}_m(A_0)$ [2, (2.9), (2.11)].

Системы форм $\{\tilde{\omega}_i^p\}, \{\tilde{\theta}_j^i\}, \{\tilde{\mathcal{V}}_p^{\alpha}\}$, построенные по законам соответственно вида (2.7), (2.13), (2.20) (в этом случае, входящие в них формы и функции пишутся с черточкой сверху), удовлетворяют (каждая) структурным уравнениям Картана-Лаптева и определяют соответственно пространства $\bar{P}_{n,r}; \bar{P}_{n,e}; \bar{P}_{n,n-m-1}$ с линейной связностью проективного типа, двойственные соответственно пространствам $P_{n,r}; P_{n,e}; P_{n,n-m-1}$. Таким образом, имеет место

Теорема 2. С регулярным $\mathcal{H}(A,1)$ -распределением проективного пространства P_n в дифференциальной окрестности порядка $t > 2$ его образующего элемента ассоциируются пространства проективной связности $\bar{P}_{n,r}; \bar{P}_{n,e}; \bar{P}_{n,n-m-1}$, двойственные в смысле А.В.Столярова соответственно пространствам проективной связности $P_{n,r}; P_{n,e}; P_{n,n-m-1}$ относительно инволютивного преобразования \mathcal{H} (1.1). Порядок t дифференциальной окрестности определяется порядком охвата квазитензоров $\{\mathcal{V}_p^{\alpha}\}, \{\omega_o^{\alpha}\}, \{\omega_p^{\alpha}\}$, участвующих в охватах.

Библиографический список

1. Волкова С.Ю. $\mathcal{H}(A,1)$ -распределения проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1991. Вып.22. С.23-25.

2. Волкова С.Ю. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(A,1)$ -распределением // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1992. Вып.23. С.15-23.

3. Столяров В.В. Двойственная теория регулярного распределения гиперплоскостных элементов в пространстве проек-

тивной связности. I; II // Известия вузов. Математика. 1980. №. С.79-82; 1980. № 2. С.84-87.

4. Столяров А.В. Двойственная теория гиперплоскостного распределения и ее приложения // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1982. Вып.13. С.95-102.

5. Лаптев Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Тр. IV Всесоюз. матем. съезда, 1961. Л.: Наука, 1964. Т.2. С.225-233.

6. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.49-94.

УДК 514.763

О ГРУППЕ ТОЧЕЧНЫХ СИММЕТРИЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫШЕГО ПОРЯДКА

В.И.Глизбург

(Московский государственный педагогический университет)

Предметом исследования настоящей статьи является обыкновенная дифференциальная система произвольного порядка $p > 2$

$$\frac{d^p x^a}{(dx^1)^p} = s_{(p)}^a(x^1, x^6, \frac{dx^6}{dx^1}, \dots, \frac{d^{p-1}x^6}{(dx^1)^{p-1}}), \quad a, 6 = 2, n, \quad (I)$$

определенная на дифференцируемом многообразии V_n , и некоторые вопросы, связанные с ее группой точечных симметрий.

В работах [1], [2], [3] на основе поэтапного многоступенчатого процесса редукции расслоения p -реперов предложены конструкции связностей картановского типа как редуктивной [3], так и не являющейся таковой [1] - [3], ассоциированных с исходной системой дифференциальных уравнений (I). Другими словами, построена замкнутая инвариантная дифференциально-геометрическая структура, трактуемая как связность Картана в некотором главном расслоении, полностью определяющая геометрию обыкновенной дифференциальной системы произвольного порядка.

Теорема 1. Система обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка (I) индуцирует в некотором главном