УДК 524.85

А. В. Юров, А. В. Япарова

ПОЛУЧЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ФРИДМАНА, ПРИВОДЯЩИХ К ФОРМУЛЕ КАРДИ — ВЕРЛИНДЕ ПОСРЕДСТВОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ

Рассматривается возможность получения точных решений уравнений Фридмана, для которых верна формула Карди — Верлинде, посредством преобразования Дарбу. Предложены две модификации преобразования Дарбу, которые также позволяют строить точные решения уравнений Фридмана. Получены точные решения уравнений Фридмана, для которых формула Карди — Верлинде верна хотя бы в окрестности некоторых сингулярностей.

It is considered a possibility of generation of exact solutions for Friedman equations by Darboux transformation, for which Cardy — Verlinde formula is valid. Two modifications of Darboux transformation are offered, which let generate such solutions. Exact solutions are obtained, for which Cardy — Verlinde formula is valid at least near some singularities.

Ключевые слова: уравнения Фридмана, формула Карди — Верлинде, преобразование Дарбу.

Key words: Friedman equations, Cardy — Verlinde formula, Darboux transformation.

Относительно недавно Верлинде установил, что имеется некая связь между уравнениями Фридмана, описывающими эволюцию $(n+1)$-мерной замкнутой радиационно-доминированной Вселенной, и формулой Карди для энтропии в конформной теории поля (КТП). В работе [1] была получена формула Карди — Верлинде (КВ), связывающая энтропию с полной энергией E и энергией Казимира E_C:

$$S=\frac{2\pi}{n}a\sqrt{E_C\left(2E-E_C\right)}\,. \tag{1}$$

Энергия Казимира определяется Верлинде как нарушение тождества Эйлера:

$$E_C\equiv n(E+pV-TS).$$

Здесь p —давление; V — объем; T — температура; S —энтропия в термодинамическом смысле. Одно из уравнений Фридмана для замкнутой Вселенной

$$H^2=\frac{16\pi G}{n\left(n-1\right)}\frac{E}{V}-\frac{1}{a^2}\,, \tag{2}$$

где H — параметр Хаббла; a — масштабный фактор; E — полная энергия во Вселенной; V — пространственный объем замкнутой Вселенной, можно переписать в виде

$$S_H = \frac{2\pi}{n} a\sqrt{E_{BH}\left(2E - E_{BH}\right)}, \tag{3}$$

где $S_H = (n-1)HV/(4G)$ — энтропия Хаббла; $E_{BH} = n(n-1)V/(8\pi Ga^2)$ — энергия Бекенштейна — Хокинга. В [1] было предложено новое универсальное космологическое ограничение на энергию Казимира $E \leqslant E_{BH}$. В случае сильной самогравитации ($Ha \geqslant 1$) полная энергия E удовлетворяет условия $E \geqslant E_{BH}$. Предполагая $E_C \leqslant E$, получим, что энтропия (3) достигает максимума, когда $E_C = E_{BH}$. При этом $S = S_H$, то есть S_H — ограничение на энтропию, и уравнение Фридмана (3), записанное в термодинамических параметрах, в точности совпадает с выражением для энтропии в КТП. Опубликовано множество работ, рассматривающих различные модификации и обобщения формулы КВ, например [2—6], однако в них речь идет о достаточно специфических уравнениях состояния.

Формула КВ, по-видимому, выявляет некоторую глубокую связь между ОТО и КТП, поэтому представляет интерес поиск более общих моделей, в которых формула КВ выполняется хотя бы в окрестностях сингулярностей. Это должна быть модель замкнутой Вселенной, уравнение состояния материи в которой ведет себя в окрестности сингулярности как уравнение состояния для радиационно-доминированной Вселенной. Цель данной работы — построение таких решений с использованием преобразования Дарбу (ПД) и его модификаций.

Рассмотрим уравнения Фридмана для замкнутой Вселенной ($k = +1$)

$$\ddot{a} = -\frac{1}{2}\left(\rho + 3p\right), \quad \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \rho - \frac{k}{a^2}, \tag{4}$$

где a — масштабный фактор; ρ — полная плотность энергии; p — давление. Дополним их уравнением состояния для радиационно-доминированной Вселенной с космологической постоянной

$$p = -\rho_\Lambda + \frac{\rho^R}{3}, \tag{5}$$

где $\rho_\Lambda = \pm\lambda^2 = \mathrm{const}$ — плотность энергии космологической постоянной; ρ^R — плотность энергии излучения. Запишем теперь первое из уравнений (4) в виде

$$\ddot{a} = \left(U(t) - E\right)a. \tag{6}$$

Из (4), (5) имеем

$$U(t) = -\frac{A^2}{a^4(t)}, \; E = -\rho_\Lambda. \tag{7}$$

Когда уравнение представлено в такой форме, становится очевидным, что к его решению можно применить ПД. Для того чтобы выполнить ПД, необходимо знать хотя бы два решения уравнения вида (6), отвечающих различным значениям параметра E. Решение уравнений Фридмана для нулевой космологической постоянной $\rho_\Lambda = 0$ (что означает $E = 0$) имеет вид

$$a_0(t)=\sqrt{t(2A-t)}\,,\ \rho_0^R=\frac{A^2}{t^2\left(2A-t\right)^2}=\frac{A^2}{a_0^4\left(t\right)}\,,\ p_0=\frac{A^2}{2t^2\left(2A-t\right)^2}\,, \tag{8}$$

где A — постоянная интегрирования. Будем выполнять ПД именно для этого решения. Также необходимо иметь опорную функцию, которая являлась бы решением уравнения (6) с иным значением параметра E. Согласно (7), (8) выберем в качестве потенциала $U_0(t)=-\dfrac{A^2}{a_0^4(t)}$ и напишем уравнение (6) для $\rho_\Lambda = 0$, $\rho_\Lambda = -\lambda^2$ и $\rho_\Lambda = +\lambda^2$:

$$\ddot{a}_0=-\frac{A^2}{t^2(2A-t)^2}a_0\,,\ \rho_\Lambda = 0\ (E=0), \tag{9}$$

$$\ddot{a}_\pm=\left(-\frac{A^2}{t^2\left(2A-t\right)^2}\pm\lambda^2\right)a_\pm\,,\ \rho_\Lambda=\pm\lambda^2,\ (E=\pm\lambda). \tag{10}$$

Уравнения (10) не являются уравнениям Фридмана, однако, используя их решения в качестве опорной функции, можно выполнить ПД для решения уравнения (9) (см. (8)), которому удовлетворяет масштабный фактор замкнутой радиационно-доминированной Вселенной. Запишем формулы ПД:

$$a_\pm^{(1)}=\dot{a}_0-\frac{\dot{a}_\pm}{a_\pm}a_0\,, \tag{11}$$

$$U_\pm^{(1)}=U_0-2\frac{\ddot{a}_\pm}{a_\pm}+2\frac{\dot{a}_\pm^2}{a_\pm^2}\,. \tag{12}$$

При этом $a^{(1)}$ является решением уравнения $\ddot{a}^{(1)}=U^{(1)}(t)a^{(1)}$.

Для того чтобы второе из уравнений Фридмана (4) можно было привести к виду (3), оно должно описывать замкнутую Вселенную, то есть функции $a^{(1)}$ и $\rho^{(1)}$ должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\left(\dot{a}^{(1)}\right)^2}{\left(a^{(1)}\right)^2}=\rho^{(1)}-\frac{1}{\left(a^{(1)}\right)^2}\,. \tag{13}$$

Отсюда

$$\rho^{(1)}=\frac{\left(\dot{a}^{(1)}\right)^2+1}{\left(a^{(1)}\right)^2}\,. \tag{14}$$

Для того же, чтобы формула КВ для энтропии в окрестности сингулярности $t=t_s$ имела вид (1), необходимо, чтобы в этой окрестности выполнялось условие (в случае трех пространственных измерений)

$$\rho^{(1)}\sim\left(a^{(1)}\right)^{-4}, \tag{15}$$

то есть уравнение состояния должно совпадать с уравнением состояния для радиационно-доминированной Вселенной. Заметим, что из уравнения (14) и условия (15) в окрестности сингулярности следует:

$$a^{(1)}(t)\to M\in\mathbf{R},\ M<\infty\ \text{при}\ t\to t_s. \tag{16}$$

Отметим также, что поскольку $a^{(1)}$ является точным решением уравнения $\ddot{a}^{(1)} = U^{(1)}a^{(1)}$, $\rho^{(1)}$ определяется из (14), а $p^{(1)}$ вычисляется из

$$U^{(1)} = -0,5\left(\rho^{(1)} + 3p^{(1)}\right), \qquad (17)$$

закон сохранения энергии выполняется автоматически. Однако при рассмотрении приближенного решения закон сохранения может нарушаться, восстанавливаясь при переходе к точному решению. Если в окрестности $t = t_s$ верно (15), то закон сохранения энергии выполняется и для приближенного решения при условии

$$U^{(1)} = -\rho^{(1)}. \qquad (18)$$

Таким образом, если в окрестности сингулярности для приближенного решения справедливы условия (15), (16) и (18), то можно записать формулу КВ для энтропии, которая в режиме сильной самогравитации $\dot{a}^{(1)} \geqslant 1$ и при $E_C = E_{BH}$ совпадает с уравнением Фридмана (13). При этом энтропия имеет максимальное значение, равное энтропии Хаббла S_H.

Рассмотрим теперь построение решений уравнения Фридмана посредством преобразования Дарбу. Уравнения (10) нельзя решить точно, однако можно взять их приближения в окрестностях точек $t = 0$ и $t = 2A$, то есть в тех точках, в которых потенциал $U_0(t)$ имеет особенности:

$$\ddot{a}_{\pm} = \left(-\frac{1}{4t^2} \pm \lambda^2\right) a_{\pm},\ t \approx 0, \qquad (19)$$

$$\ddot{a}_{\pm} = \left(-\frac{1}{4(2A-t)^2} \pm \lambda^2\right) a_{\pm},\ t \approx 0. \qquad (20)$$

Общие решения уравнений (19) и (20) имеют вид

$$t \approx 0,\ E = -\lambda:\ a_{-}(t) = C_1\sqrt{t}J_0(\lambda t) + C_2\sqrt{t}Y_0(\lambda t), \qquad (21)$$

$$t \approx 0,\ E = +\lambda:\ a_{+}(t) = C_1\sqrt{t}I_0(\lambda t) + C_2\sqrt{t}K_0(\lambda t), \qquad (22)$$

$$t \approx 2A,\ E = -\lambda:\ a_{-}(t) = C_1\sqrt{2A-t}J_0\left(\lambda(2A-t)\right) + C_2\sqrt{t}Y_0\left(\lambda(2A-t)\right), \qquad (23)$$

$$t \approx 2A,\ E = +\lambda:\ a_{-}(t) = C_1\sqrt{2A-t}I_0\left(\lambda(2A-t)\right) + C_2\sqrt{t}K_0\left(\lambda(2A-t)\right), \qquad (24)$$

где J_0, Y_0 и I_0, K_0 — функции Бесселя первого рода, второго рода и модифицированные функции Бесселя первого рода, второго рода соответственно; а C_1 и C_2 произвольные постоянные интегрирования.

Теперь, используя (21)—(24) в качестве опорных функций, можно выполнить ПД для функции $a_0(t)$ в окрестностях сингулярностей $t = 0$ и $t = 2A$ по формулам (11) и (12). Имея $a^{(1)}$ и $U^{(1)}$, получаем $\rho^{(1)}$ из (11) и $p^{(1)}$ из (17). Из соображений экономии не будем приводить все полученные посредством ПД решения. Укажем лишь, что решения, удовлетворяющие условиям (12) и (13), дают только те опорные функции, в которых $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$. Эти решения в окрестности точек $t = 0$ и $t = 2A$ имеют вид

$$t \approx 0,\ E = \pm\lambda:\ a_{\pm}^{(1)}(t) \approx -\frac{1}{2\sqrt{2A}}\sqrt{t},\ \rho_{\pm}^{(1)} \approx \frac{1}{4t^2},\ U_{\pm}^{(1)} = \frac{3}{4t^2}. \qquad (25)$$

$$t \approx 2A,\ E = \pm\lambda: a_{\pm}^{(1)}(t) \approx -\frac{1}{2\sqrt{2A}}\sqrt{2A-t},\ \rho^{(1)} \approx \frac{1}{4(2A-t)^2},\ U_{\pm}^{(1)} = \frac{3}{4(2A-t)^2}. \qquad (26)$$

Легко заметить, что эти приближенные решения не удовлетворяют условию (18), поэтому для уверенного ответа на вопрос, будет ли верна формула КВ в окрестности сингулярностей $t=0$ и $t=2A$ для данных решений, необходимо их дальнейшее уточнение.

В данной работе предлагаются две модификации ПД (ПДМ I и ПДМ II), которые позволяет получить точные решения уравнений Фридмана не только в окрестностях сингулярностей $t = 0$ и $t = 2A$.

Рассмотрим два уравнения

$$\psi_{xx}(x) = (u(x) - \sigma)\psi(x), \tag{27}$$

$$\varphi_{xx}(x) = (v(x) - \mu)\varphi(x), \tag{28}$$

где нижний индекс x означает дифференцирование по x, и $u(x) \neq v(x)$. Нетрудно проверить, что после преобразования (далее будем обозначать его ПДМ I)

$$\psi \to \psi^{(1)} = \psi_x - \frac{\phi_x}{\phi}\psi,\; u \to u^{(1)} = u - 2\frac{\phi_{xx}}{\phi} + 2\frac{\phi_x^2}{\phi^2} + \frac{u_x - v_x}{\dfrac{\psi_x}{\psi} - \dfrac{\phi_x}{\phi}} \tag{29}$$

функция $\psi^{(1)}$ будет решением уравнения

$$\psi_{xx}^{(1)}(x) = \left(u^{(1)}(x) - \sigma\right)\psi^{(1)}(x). \tag{30}$$

Данное преобразование, в отличие от ПД, выполняется только для конкретного значения s, поскольку в преобразованный потенциал входит преобразуемая функция. Важно отметить также, что поскольку функция преобразовывается, как и при ПД, то если исходная функция интегрируема с квадратом, это свойство сохраняется после преобразования. При $u = v$ и $\sigma \neq \mu$ ПДМ I сводится к ПД.

Теперь рассмотрим еще одно преобразование решения уравнения (27) (далее будем обозначать его ПДМ II):

$$\psi \to \psi^{(1)} = \alpha\left(\psi_x - \frac{\phi_x}{\phi}\psi\right),\; u \to u^{(1)} = u - 2\frac{\phi_{xx}}{\phi} + 2\frac{\phi_x^2}{\phi^2} - 2\frac{\alpha_x}{\alpha}\frac{\phi_x}{\phi} + \frac{\alpha_{xx}}{\alpha}, \tag{31}$$

где α — решение дифференциального уравнения $\dfrac{d\alpha}{\alpha} = -\dfrac{d(u-v)}{2(v-u+\sigma-\mu)}$.

Легко показать, что и в этом случае $\psi^{(1)}$ является решением уравнения вида (30). Данное преобразование сводится к ПД при $u = v$ и $\sigma \neq \mu$, $\alpha = \mathrm{const}$. Используем ПДМ I и ПДМ 2 для того, чтобы получить точные решения уравнений Фридмана. В качестве преобразуемой функции по-прежнему выбираем решение уравнения (9), соответствующее замкнутой радиационно-доминированной Вселенной. В качестве же опорных функций выберем решения уравнений Фридмана для (4) для замкнутой ($k = +1$), плоской ($k = 0$) и открытой ($k = + 1$) радиационно-доминированных вселенных с положительной, отрицательной и нулевой космологической постоянной. Поскольку решение для случая $k = +1$, $\rho_\Lambda = 0$ является преобразуемой функцией, естественно, что оно исключается из числа опорных функций. Таким образом, получаем восемь новых точных решений уравнений Фридмана. Мы не приводим их здесь вследствие их громоздкости.

Анализ полученных решений показывает, что формула КВ, как правило, справедлива, в окрестности хотя бы одной из сингулярностей $t = 0$ или $t = 2A$, однако иногда для этого требуется ограничение на значение космологической постоянной. Формула КВ не выполняется ни в одной из сингулярностей только для решения, полученного посредством ПДМ I с опорной функцией, описывающей Вселенную Фридмана с положительной кривизной и положительной космологической постоянной.

Целью работы было показать, что формула КВ, в которой, по-видимому, заключена глубокая связь между КТП и ОТО, может быть верна для большего числа случаев, чем ранее предполагалось.

С помощью модификаций ПД удалось построить точные решения уравнений Фридмана, для которых формула КВ верна в окрестности хотя бы одной сингулярности (правда, некоторые решения требуют для этого ограничения на входящие в них параметры). Что касается решений, полученных посредством ПД, для них необходимо уточнение. Две предложенных модификации ПД представляют несомненный математический интерес и требуют дальнейшего исследования.

Список литературы

1. *Verlinde E.* On the Holographic Principle in the Radiation Dominated Universe. URL: (2010) [arXiv:hep-th/0008140].

2. *Brevik I., Nojiri S., Odintsov S.D. et al.* Cardy—Verlinde formula in FRW Universe with inhomogeneous generalized fluid and dynamical entropy bounds near the future singularity // Eur. Phys. J. 2010. Vol. C69. P. 563—574.

3. *Brevik I., Nojiri S., Odintsov S.D. et al.* Entropy and Universality of Cardy—Verlinde formula in Dark Energy Universe // Phys. Rev. 2004. D70:043520.

4. *Brevik I., Odintsov S.D.* On the Cardy—Verlinde Entropy Formula in Viscous Cosmology // Ibid. 2002. D 65, 067302.

5. *James E. L., Nojiri S., Odintsov S.D. et al.* The Ads/CFT Correspondence and Logariphmic Corrections to raneworld Cosmology and the Cardy—Verlinde Formula // Phys. Lett. 2002. B544. P. 337—345.

6. *Wang B., Abdalla A., Su R. – K.* Relating Friedmann equation to Cardy formula in universes with cosmological constant // Ibid. 2001. P. 394—398.

Об авторах

Артем Валерьянович Юров — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университета им. И. Канта, Калининград.

E-mail: artyom_yurov@mail.ru

Анна Валентиновна Япарова — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: lisa74@yandex.ru

About the authors

Prof Artyom Yurov — I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: artyom_yurov@mail.ru

Anna Yaparova — PhD student, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: lisa74@yandex.ru