но вырожденной ранга два.

Библиографический список

1. Room T.G. The geometry of determinantal loci. Cambridge, 1938. 438 p.

2. А к и в и с М.А. К дифференциальной геометрии грассманова многообразия// Tensor. 1982. V.38. P.273-282.

3. К р у г л я к о в Л.З., Мизин А.Г. Допустимые комплексы коразмерности два многомерных плоскостей проективного пространства//Сиб.ж. 1986.Т.27.№5.С.110-115.

УДК 514.75

О НЕКОТОРЫХ СЕТЯХ, ПОСТРОЕННЫХ ПО ПСЕВДОФОКУСАМ НОРМАЛЕЙ ПОВЕРХНОСТИ V_2 В E_4

В.И.Г л и з б у р г

(Московский государственный педагогический институт)

Многообразие M_p погружено в виде поверхности в евклидово n-пространство $(n>p)$. Существуют различные конструктивные способы задания сети линий на этой поверхности. В работе рассмотрены способы построения сети линий на поверхности V_2 евклидова пространства E_4 при помощи псевдофокусов оснащающей и дополнительной нормалей, а также изучена связь свойств псевдофокусов нормалей со свойствами сети, их порождающей.

Отнесем гладкую поверхность V_2 в E_4 к подвижному реперу $R^A=\{A,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha\}$, в котором $A\in V_2$, $\vec{e}_i\in T_2(A)$, $\vec{e}_\alpha$ -составляют ортонормированный базис ортогонального дополнения $N_2(A)$ касательного пространства $T_2(A)$ поверхности V_2 в точке A. Здесь и далее индексы принимают следующие значения: $i,j=1,2$; $\alpha,\beta=3,4$; $\mathcal{I},\mathcal{J}=1,4$. Деривационные формулы такого репера имеют вид:

$$d\vec{A}=\omega^i\vec{e}_i\,;\quad d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha\,;\quad d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^i\vec{e}_i+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta\,.$$

Поверхность V_2 относительно репера R^A определяется системой дифференциальных уравнений $\omega^\alpha=0$, продолжая которую имеем

$$\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\,\omega^j,\quad b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha\,. \tag{1}$$

Зададим на поверхности V_2 поле одномерной нормали (оснащающая нормаль). Задание поля нормали определяет на поверхности сеть Σ_2 линий кривизны относительно этой нормали [3],[2]. Выберем ортонормированный базис $\{\vec{e}_\alpha\}$ в плоскости $N_2(A)$ так, что вектор $\vec{e}_{\alpha_0}$ (α_0 -фиксированно) направлен вдоль оснащающей нормали. Единичные векторы $\vec{e}_i$

репера R^A направим по касательным к линиям кривизны относительно оснащающей нормали $[A,\vec{e}_{\alpha_0}]$. Тогда, как показано в [2], имеет место:

$$b_{ij}^{\alpha_0}=b_{ji}^{\alpha_0}=0\,. \tag{2}$$

В силу ортонормированности репера R^A имеем

$$\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{I}}=-\omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{J}},\quad \omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{I}}=0\,. \tag{3}$$

1. Рассмотрим на поверхности V_2 в E_4, отнесенной к сети Σ_2 линий кривизны относительно оснащающей нормали, произвольную сеть Σ_2^*, образованную интегральными кривыми векторных полей $\vec{b}_i$:

$$\vec{b}_1=\vec{e}_1+\mu_1\vec{e}_2\,,\quad \vec{b}_2=\mu_2\vec{e}_1+\vec{e}_2\quad(\vec{b}_1\nparallel\vec{b}_2), \tag{4}$$

где μ_i -некоторые гладкие функции точки поверхности. Очевидно, что, положив в (4) $\mu_1=\mu_2=0$, получим векторные поля $\vec{b}_i$:

$$\vec{b}_1=\vec{e}_1\,,\ \vec{b}_2=\vec{e}_2\quad(\vec{b}_1\nparallel\vec{b}_2), \tag{4'}$$

определяющие сеть Σ_2.

О п р е д е л е н и е. Псевдофокусом нормали $[A,\vec{e}_\alpha]$ относительно сети Σ_2^* назовем такую точку $F_\alpha^i\in[A,\vec{e}_\alpha]$, смещение которой при смещении точки A в направлении $\vec{b}_i$ не выходит из 3-плоскости $P_3(A)=[A,\vec{b}_j,\vec{e}_\alpha]$, $i\neq j$.

Если $\vec{F}_\alpha^i=\vec{A}+\lambda_\alpha^i\vec{e}_\alpha$, то $d\vec{F}_\alpha^i\in P_3(A)$ тогда и только тогда, когда $\omega^i+\lambda_\alpha^i\omega_\alpha^i-\mu_j(\omega^i\mu_i+\lambda_\alpha^i\omega_\alpha^j)=0$ ($i\neq j$; по i,j -нет суммирования). Учитывая формулы (1) и (3), на каждой из указанных нормалей получаем по два псевдофокуса относительно заданной сети Σ_2^* с координатами:

$$\lambda_\alpha^i=\frac{\mu_i\mu_j-1}{\mu_i\mu_j b_{jj}^\alpha-b_{ii}^\alpha+(\mu_j-\mu_i)b_{ij}^\alpha}\quad(i\neq j). \tag{5}$$

З а м е ч а н и е 1. Из (4) и (5) следует, что псевдофокусы оснащающей (дополнительно) нормали относительно сети Σ_2 совпадают тогда и только тогда, когда выполняется условие: $b_{11}^{\alpha_0}=b_{22}^{\alpha_0}$ ($b_{11}^\alpha=b_{22}^\alpha$, $\alpha\neq\alpha_0$).

Рассмотрим вектор нормальной кривизны $\vec{K}_n$ произвольной кривой γ на поверхности V_2 в точке A: $\vec{K}_n(\gamma)=\frac{1}{ds^2}\cdot\omega^i\omega^j\cdot b_{ij}^\alpha\,\vec{e}_\alpha$, где s -натуральный параметр кривой γ. Полагая в формуле (5) $\alpha=\alpha_0$, учитывая условие (2) и замечание 1, получим следующие утверждения:

Т е о р е м а 1. В некоторой окрестности точки поверхности $V_2\subset E_4$ следующие условия эквивалентны: 1) $b_{11}^{\alpha_0}=b_{22}^{\alpha_0}$; 2) псевдофокусы оснащающей нормали совпадают; 3) псевдофокусы оснащающей нормали относительно любой сети совпадают; 4) проекции векторов нормальных кривизн линий сети Σ_2 на оснащающую нормаль равны.

Т е о р е м а 2. В окрестности точки $A \in V_2 \subset E_4$, в которой имеет место $b_{11}^{\alpha_0} \neq b_{22}^{\alpha_0}$, следующие условия эквивалентны: I) псевдофокусы оснащающей нормали относительно произвольной сети Σ_2^* совпадают; 2) касательные к линиям произвольной сети Σ_2^*, отличной от сети Σ_2, и касательные к линиям кривизны относительно оснащающей нормали гармонически разделяют друг друга; 3) векторы нормальных кривизн $\vec{K}_n^1$, $\vec{K}_n^2$ линий произвольной сети Σ_2^* удовлетворяют условию: $\vec{K}_n^2 = \vec{K}_n^1 - \frac{1}{1+\mu_1^2} \cdot 4\mu_1 b_{12}^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}$ $(\alpha \neq \alpha_0)$, где μ_1 -функция из условия (4).

З а м е ч а н и е 2. Если поверхность $V_2 \subset E_3$, то условие 3 теоремы 2 следует заменить условием равенства нормальных кривизн линий рассматриваемой сети.

Полагая в формуле (5) $\alpha \neq \alpha_0$ и учитывая замечание I, можно показать, что справедливы

Т е о р е м а 3. Если в некоторой окрестности точки A поверхности $V_2 \subset E_4$ сеть линий кривизны относительно оснащающей нормали является сетью линий кривизны (т.е. сетью линий кривизны относительно любой одномерной нормали), то следующие условия эквивалентны: I) $b_{11}^{\alpha} \equiv b_{22}^{\alpha}$ $(\alpha \neq \alpha_0)$, 2) псевдофокусы дополнительной нормали относительно сети линий кривизны относительно оснащающей нормали совпадают, 3) псевдофокусы дополнительной нормали относительно любой сети совпадают.

Т е о р е м а 4. Если псевдофокусы дополнительной нормали поверхности $V_2 \subset E_4$ совпадают относительно сети Σ_2 линий кривизны относительно оснащающей нормали, то сеть Σ_2 является сетью линий кривизны на поверхности $V_2 \subset E_4$ тогда и только тогда, когда псевдофокусы дополнительной нормали любой сети совпадают.

Потребовав одновременно совпадения псевдофокусов оснащающей и дополнительной нормалей, из формул (5) вытекает

Т е о р е м а 5. В окрестности точки $A \in V_2 \subset E_4$, в которой выполняется условие $b_{11}^{\alpha_0} \neq b_{22}^{\alpha_0}$, сеть Σ_2 линий кривизны относительно оснащающей нормали является сетью линий кривизны тогда и только тогда, когда существует сеть, относительно которой псевдофокусы оснащающей и дополнительной нормалей совпадают одновременно.

С л е д с т в и е I (из теорем 2,5). I) Если касательные к линиям произвольной сети Σ_2^* на поверхности $V_2 \subset E_4$ и касательные к линиям сети Σ_2 линий кривизны относительно оснащающей нормали гармонически разделяют друг друга, то сеть Σ_2 является сетью линий кривизны на $V_2 \subset E_4$ тогда и только тогда, когда псевдофокусы дополнительной нормали относительно сети Σ_2^* совпадают. 2) Если в окрестности точки $A \in V_2 \subset E_4$, в которой выполняется условие $b_{11}^{\alpha_0} = b_{22}^{\alpha_0}$, сеть Σ_2 линий кривизны относительно оснащающей нормали является

сетью линий кривизны, то касательные к линиям произвольной сети Σ_2^* и касательные к линиям кривизны гармонически разделяют друг друга тогда и только тогда, когда псевдофокусы дополнительной нормали относительно сети Σ_2^* совпадают.

Рассмотрим на оснащающей и дополнительной нормалях точки F_{α}^{M} с координатами

$$\lambda_{\alpha}^{M} = \frac{2}{b_{11}^{\alpha} + b_{22}^{\alpha}} = \frac{1}{\text{Пр}_{\vec{e}_{\alpha}} \vec{M}},$$

где $\vec{M} = \frac{1}{2} \gamma^{ij} b_{ij}^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}$ -вектор средней кривизны поверхности V_2 в точке A [3]. Можно показать, что имеет место

Т е о р е м а 6. Справедливы предложения: I) на каждой из нормалей $[A, \vec{e}_{\alpha}]$ совпавшие псевдофокусы совпадают с точкой F_{α}^{M}; 2) относительно произвольной сети попарно различные точки $A, F_{\alpha}^{1}, F_{\alpha}^{2}, F_{\alpha}^{M}$ на каждой из нормалей $[A, \vec{e}_{\alpha}]$ образуют гармоническую четверку.

С л е д с т в и е 2 (из теорем I,6 п.2). Псевдофокусы оснащающей нормали относительно любой сети совпадают с точкой $F_{\alpha_0}^{M}$ тогда и только тогда, когда в любой точке поверхности $V_2 \subset E_4$ выполняется условие $b_{11}^{\alpha_0} = b_{22}^{\alpha_0}$.

2. Решим вопрос о том, как по псевдофокусам нормалей однозначно построить сеть на поверхности. В силу теоремы 6 координаты псевдофокусов нормали не определяют однозначно сеть, порождающую их. Для однозначного определения сети Σ_2^* на поверхности рассмотрим на каждой из нормалей $[A, \vec{e}_{\alpha}]$ по точке $F_{\alpha *}^{12}$, являющейся псевдофокусом соответствующей нормали относительно сети $\Sigma_2^{\prime *}$ $(\vec{b}_1, \vec{b}_1 + \vec{b}_2)$ при смещении точки A в направлении $\vec{b}_1$, где $\vec{b}_i$ -векторные поля из условия (4), определяющие искомую сеть Σ_2^*. Тогда координаты $\lambda_{\alpha *}^{12}$ указанных псевдофокусов имеют вид:

$$\lambda_{\alpha *}^{12} = \frac{\mu_1 \mu_2 - 1}{\mu_1 \mu_2 b_{22}^{\alpha} - b_{11}^{\alpha} + \mu_1 (b_{22}^{\alpha} - b_{11}^{\alpha}) + b_{12}^{\alpha} (\mu_2 - \mu_1 + 1 - (\mu_1)^2)}. \tag{6}$$

а) На одной из нормалей рассмотрим две произвольные различные точки F_{α}^{1} и $F_{\alpha *}^{12}$, не являющиеся проективно симметричными с точками A и F_{α}^{M}. Считаем их координаты λ_{α}^{1} и $\lambda_{\alpha *}^{12}$ известными. Тогда искомые функции μ_i, определяющие по условию (4) векторные поля $\vec{b}_i$, задающие сеть Σ_2^* на поверхности V_2, найдем, решая совместно (5) и (6) (по α -нет суммирования):

$$\mu_1 = \frac{\lambda_{\alpha}^{1} - \lambda_{\alpha *}^{12} + b_{12}^{\alpha} \lambda_{\alpha}^{1} \lambda_{\alpha *}^{12}}{\lambda_{\alpha *}^{12} (1 - \lambda_{\alpha}^{1} b_{22}^{\alpha})},$$

$$\mu_2 = \frac{\lambda_{\alpha *}^{12} (1 - \lambda_{\alpha}^{1} b_{22}^{\alpha})(1 - \lambda_{\alpha}^{1} b_{11}^{\alpha}) - b_{12}^{\alpha} \lambda_{\alpha}^{1} (\lambda_{\alpha}^{1} - \lambda_{\alpha *}^{12} + b_{12}^{\alpha} \lambda_{\alpha}^{1} \lambda_{\alpha *}^{12})}{(1 - \lambda_{\alpha}^{1} b_{22}^{\alpha})(\lambda_{\alpha}^{1} - \lambda_{\alpha *}^{12})}.$$

З а м е ч а н и е 3. В силу следствия 2 на поверхности, в любой точке которой выполняется условие $\ell_{11}^{\alpha_0} = \ell_{22}^{\alpha_0}$, однозначное построение сети по псевдофокусам $\mathcal{F}_{\alpha_0}^1$ и $\mathcal{F}_{\alpha_*}^{12}$ оснащающей нормали невозможно.

б) На каждой из нормалей $[A, \vec{e}_\alpha]$ выберем по произвольной точке $\mathcal{F}_\alpha^1$ с координатами λ_α^1 соответственно. Тогда из (5) в общем случае получим две пары функций: μ_i и $\tilde{\mu}_i$, определяющие по условию (4) взаимные [1] сети Σ_2^* и $\tilde{\Sigma}_2^*$. Можно показать, что для однозначного определения сети Σ_2^* ($\tilde{\Sigma}_2^*$) достаточно, кроме задания точек $\mathcal{F}_\alpha^1$ на каждой из нормалей, выбрать на одной из них дополнительно точку $\mathcal{F}_{\alpha_*}^{12}$ ($\tilde{\mathcal{F}}_{\alpha_*}^{12}$), являющуюся псевдофокусом соответствующей нормали относительно сети $\Sigma_2'^*(\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_1+\vec{\ell}_2)$ ($\tilde{\Sigma}_2'^*(\vec{\tilde{\ell}}_1, \vec{\tilde{\ell}}_1+\vec{\tilde{\ell}}_2)$) при смещении точки A в направлении $\vec{\ell}_1$ ($\vec{\tilde{\ell}}_1$), где $\vec{\ell}_i$ ($\vec{\tilde{\ell}}_i$) -векторные поля, определяющие искомую сеть $\Sigma_2^*(\tilde{\Sigma}_2^*)$.

3. Очевидно, что, накладывая соответствующие условия на функции μ_i, определяющие сеть Σ_2^*, можно за счет специального выбора координат точек - псевдофокусов нормалей любой из представленных здесь способов использовать для построения сети с определенными заданными свойствами (ортогональной, асимптотической, сопряженной, сети линий кривизны относительно одной из нормалей и т.д.). Причем способ построения взаимных сетей существенно отличается от других, если обе сети одновременно обладают одним и тем же свойством.

Из рассмотренного выше ясно, что свойства сети на поверхности тесно связаны с расположением псевдофокусов нормалей относительно этой сети. В частности, например, можно отметить:

У т в е р ж д е н и е 1. Для ортогональной сети Σ_2^* следующие условия эквивалентны: 1) псевдофокусы оснащающей нормали относительно сети Σ_2^* совпадают; 2) сети Σ_2^* и Σ_2 биссекторны; 3) точка $A \in V_2$, псевдофокусы сети Σ_2 линий кривизны относительно оснащающей нормали и любой из псевдофокусов сети Σ_2^* образуют гармоническую четверку точек оснащающей нормали; 4) псевдофокусы $\mathcal{F}_{\alpha_0}^1$, $\mathcal{F}_{\alpha_0}^2$, $\mathcal{F}_{\alpha_*}^{12}$ сетей Σ_2^*, Σ_2 и сети $\Sigma_2'^*(\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_1+\vec{\ell}_2)$ ($\vec{\ell}_i$ -векторные поля, задающие сеть Σ_2^*) и точка $A \in V_2$ образуют гармоническую четверку точек оснащающей нормали.

У т в е р ж д е н и е 2. Если сеть Σ_2^* и сеть Σ_2 линий кривизны относительно оснащающей нормали биссекторны, то в окрестности точки $A \in V_2 \subset E_4$, в которой $\ell_{11}^{\alpha_0} \neq \ell_{22}^{\alpha_0}$, следующие условия эквивалентны: 1) сеть Σ_2 является сетью линий кривизны; 2) псевдофокусы дополнительной нормали относительно сети Σ_2^* совпадают; 3) существует сеть, относительно которой псевдофокусы оснащающей и дополнительной нормалей совпадают одновременно; 4) точка $A \in V_2$, псевдофокусы сети Σ_2 и любой из псевдофокусов сети Σ_2^* образуют гармоническую четверку точек дополнительной нормали; 5) псевдофокусы $\mathcal{F}_\alpha^1$, $\mathcal{F}_\alpha^2$, $\mathcal{F}_\alpha^{12}$ $(\alpha \neq \alpha_0)$ сетей Σ_2^*, Σ_2, $\Sigma_2'^*$ и точка $A \in V_2$ образуют гармоническую четверку точек дополнительной нормали.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве// Литов.матем.сб.1966.Т.6.№4.С.475-491.

2. Б а з ы л е в В.Т. Об одном свойстве геодезических линий на многомерных поверхностях//Вопросы дифференциальной геометрии: Уч.зап./МГПИ им.В.И.Ленина.М.,1970.Т.1.№374.С.52-56.

3. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия.М.:ГИИЛ.1948.

УДК 514.75

АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ, АССОЦИИРОВАННАЯ С $\mathcal{H}$-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

М.Ф. Г р е б е н ю к
(Киевское авиационное училище)

Настоящая работа относится к дифференциальной геометрии составных распределений многомерного аффинного пространства A_{n+1}. Рассматривается трехсоставное распределение $H(M(\Lambda))$ [1],[2], которое будем называть $\mathcal{H}$-распределением. Получена аффинная связность Γ, внутренне определенная самим $\mathcal{H}$-распределением. Показано, что связность Γ относится к классу аффинных связностей, определенных путем проектирования, если за направление проектирования принять оснащающую плоскость $\mathcal{N}_{n+1-r}(A)$. Работа является продолжением работ [1],[2].

1. Рассмотрим пространство аффинной связности $A_{n+1,r}$, $(n+1)$-мерной базой которого является аффинное пространство A_{n+1}, а слоями - (r-мерные центроаффинные пространства) - плоскости H_r соответствующих r-мерных элементов базисного Λ-распределения данного $\mathcal{H}$-распределения.

Аффинную связность Γ пространства $A_{n+1,r}$ всегда можно определить при помощи системы форм $\{\theta^p, \theta_q^p\}$ [4],[5]: $\theta^p = \omega^p - \Gamma_{0K}^p \omega^K$, $\theta_q^p = \omega_q^p - \Gamma_{qK}^p \omega^K$, удовлетворяющих структурным уравнениям: $\mathcal{D}\theta^p = \theta^q \wedge \theta_q^p + \omega^K \wedge \Delta\Gamma_{0K}^p$,
$\mathcal{D}\theta_q^p = \theta_q^r \wedge \theta_r^p + \omega^K \wedge \Delta\Gamma_{qK}^p$, где $\Delta\Gamma_{0K}^p = \nabla\Gamma_{0K}^p + \delta_K^{n+1}\omega_{n+1}^p - \Gamma_{qK}^p\omega^q - \Gamma_{0K}^q\Gamma_{qJ}^p\omega^J - \Lambda_{uK}^p\omega^u$,

$$\Delta\Gamma_{qK}^p = \nabla\Gamma_{qK}^p + \Lambda_{qK}\omega_{n+1}^p + (\Lambda_{qK}^u\Lambda_{uJ}^p - \Gamma_{qK}^r\Gamma_{rJ}^p)\omega^J.$$

Формы $\Delta\Gamma_{0K}^p$, $\Delta\Gamma_{qK}^p$, ω^K на $\mathcal{H}$-распределении образуют вполне интегрируемую систему и определяют над исходной базой (ω_0^K) поле геометрического объекта $\{\Gamma_{0K}^p, \Gamma_{qK}^p\}$. Для того, чтобы формы θ^p, θ_q^p определя-