УДК 514.76

М.В. Сорокина
(Пензенский государственный педагогический университет)

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ОБОБЩЕННОГО ЛАГРАНЖЕВА ПРОСТРАНСТВА

На касательном расслоении обобщенного лагранжева пространства естественным образом определены риманова метрика главной диагонали и почти симплектическая структура. Рассмотрены различные типы инфинитезимальных автоморфизмов почти симплектической структуры. Доказано, что размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов, сохраняющих слои, не превосходит $n(3n+5)/2$. Если, в частности, инфинитезимальные автоморфизмы являются продолженными инфинитезимальными преобразованиями базисного многообразия, то размерность алгебры не превосходит $n(n+1)/2$.

Пусть M – n-мерное дифференцируемое многообразие, $TM = \bigcup\limits_{x \in M} T_x M$ – касательное расслоение над M, $\pi : TM \to M$ – каноническая проекция. Если $x \to (x^i)$ – локальные координаты в $U \subset M$, то в $\pi^{-1}(U) \subset TM$ возникают естественные локальные координаты $(x, y) \to (x^A) = (x^i, x^{n+i} = y^i)$. Если на многообразии задано дважды ковариантное симметрическое невырожденное тензорное поле, компоненты которого $g_{ij} = g_{ij}(x, y)$ являются функциями на TM, то многообразие называется обобщенным лагранжевым пространством L^n.

Пусть ∇ – усеченная связность Картана регулярного обобщенного лагранжева пространства L^n с компонентами

Γ_{ij}^{*k}. Связность ∇ индуцирует нелинейную связность с коэффициентами $N_i^k = \Gamma_{ij}^{*k} y^j$. Горизонтальные и вертикальные лифты векторных полей с базы на касательное расслоение ТМ строятся как обычно: $h: X \to X^h$, $v: X \to X^v$. Если $X = X^i \partial_i$, то $X^h = X^i \delta_i$, $X^v = X^i \partial_{n+i}$, где $\delta_i = \partial_i - N_i^k \partial_{n+k}$, $\partial_{n+i} = \partial / \partial y^i$.

Векторные поля $\delta_A = (\delta_i, \partial_{n+k})$ образуют локальный базис векторных полей на *TM*. Коммутаторы векторных полей имеют вид: $[\delta_A, \delta_B] = \Omega_{AB}^C \delta_C$, где $\Omega_{ij}^{n+k} = \delta_j N_i^k - \delta_i N_j^k$, $\Omega_{in+j}^{n+k} = N_{i \cdot j}^k$, $\Omega_{n+ij}^{n+k} = -N_{j \cdot i}^k$, $\Omega_{ij}^k = \Omega_{in+j}^k = \Omega_{n+ij}^k = \Omega_{n+in+j}^k = \Omega_{n+in+j}^{n+k} = 0$ (точкой обозначено дифференцирование по *y*).

Рассмотрим на *TM* риманову метрику *G*, которая в репере $\{\delta_A\}$ имеет диагональный вид:

$$G_{AB} = \left(\begin{array}{c|c} g_{ij} & 0 \\ \hline 0 & g_{ij} \end{array} \right). \tag{1}$$

Распределение горизонтальных площадок связности ∇ определяет на ТМ каноническую почти комплексную структуру $J: JX^h = X^v, JX^v = -X^h$. Метрика (1) является эрмитовой относительно J: $G(JX, JY) = G(X, Y)$ для любых векторных полей *X*, *Y* на *TM*, и мы имеем почти эрмитову структуру (*TM*, *G*, *J*). Фундаментальная 2-форма этой структуры определяется следующим образом: $\Phi(X, Y) = G(X, JY)$ – и в адаптированном репере имеет вид:

$$\Phi_{AB} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -g_{ij} \\ \hline g_{ij} & 0 \end{array} \right). \tag{2}$$

Форма Ф определяет на *TM* почти симплектическую структуру.

Векторное поле *X* на *TM* является инфинитезимальным автоморфизмом почти симплектической структуры (*TM*, Ф), если производная Ли от Ф вдоль *X* равна нулю: $L_X \Phi = 0$. На

TM естественным образом выделяется три типа автоморфизмов: 1) автоморфизмы, состоящие из продолженных преобразований базы на *TM*; 2) автоморфизмы, сохраняющие слои; 3) произвольные автоморфизмы.

Рассмотрим автоморфизмы почти симплектической структуры (*TM*, Ф), состоящие из преобразований базы, продолженных на *TM*. Тогда вектор инфинитезимального преобразования есть полный лифт некоторого поля базы, т. е.

$$ {}^{C}X = \xi^{i}(x)\delta_{i} + x^{n+k}\nabla_{k}\xi^{i}\partial_{n+i} \,. \qquad (3)$$

Теорема 1. *Размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов почти симплектической структуры на касательном расслоении, состоящих из продолженных преобразований базы, не превосходит* $n(n+1)/2$.

Доказательство. Если векторное поле ${}^{C}X$ есть автоморфизм структуры (*TM*, Ф), то $\mathrm{L}_{{}^{C}X}\Phi_{AB} = 0$, т. е.

$$\xi^{C}\left(\delta_{C}\Phi_{AB} + \Phi_{PB}\Omega^{P}_{AC} + \Phi_{AP}\Omega^{P}_{BC}\right) + \delta_{A}\xi^{P}\Phi_{PB} + \delta_{B}\xi^{P}\Phi_{AP} = 0 \,. \qquad (4)$$

Для различных серий индексов уравнения (4) будут иметь вид:

$$\xi^{C}\left(\delta_{C}g_{ij} + g_{kj}\Omega^{k}_{iC} + g_{ik}\Omega^{n+k}_{n+jC}\right) + \delta_{i}\xi^{k}g_{kj} + \partial_{n+j}\xi^{n+k}g_{ik} = 0 \,, \qquad (5)$$

$$\xi^{C}\left(\delta_{C}g_{ij} + g_{kj}\Omega^{n+k}_{n+iC} + g_{ik}\Omega^{k}_{jC}\right) + \partial_{n+i}\xi^{n+k}g_{kj} + \delta_{j}\xi^{k}g_{ik} = 0 \,, \qquad (6)$$

$$\xi^{C}\left(g_{kj}\Omega^{n+k}_{iC} - g_{ik}\Omega^{n+k}_{jC}\right) + \delta_{i}\xi^{n+k}g_{kj} - \delta_{j}\xi^{n+k}g_{ik} = 0 \,, \qquad (7)$$

$$\xi^{C}\left(g_{kj}\Omega^{k}_{n+iC} - g_{ik}\Omega^{k}_{n+jC}\right) + \partial_{n+i}\xi^{k}g_{kj} - \partial_{n+j}\xi^{k}g_{ik} = 0 \,. \qquad (8)$$

Уравнения (5) и (6) эквивалентны уравнениям

$$\mathrm{L}_{X}g_{ij} = 0 \,, \qquad (9)$$

(7) эквивалентны

$$g_{kj}\mathrm{L}_{X}N^{k}_{i} - g_{ik}\mathrm{L}_{X}N^{k}_{j} = 0 \,. \qquad (10)$$

Уравнения (8) выполняются тождественно.

Из уравнения (9) вытекает $\mathrm{L}_{X}\Gamma^{*k}_{ij} = 0$ и, следовательно, $\mathrm{L}_{X}N^{k}_{i} = 0$. Значит, (10) являются следствиями (9).

Таким образом, (4) выполним тогда и только тогда, когда имеет место (9). Следовательно, для того чтобы полный лифт ${}^{C}X$ векторного поля X на базе являлся инфинитезимальным автоморфизмом почти симплектической структуры на касательном расслоении, необходимо и достаточно, чтобы поле X было инфинитезимальным движением пространства L^n. Значит, максимальная размерность группы автоморфизмов (*TM*, Φ) не превосходит максимальной размерности группы движений регулярного пространства L^n, т. е. $n(n+1)/2$. Теорема доказана.

Рассмотрим автоморфизмы (*TM*, Φ), сохраняющие слои. Тогда, как известно [1], векторное поле инфинитезимального автоморфизма должно быть проектируемым на базу и, следовательно, $X = \xi^i(x)\delta_i + \xi^{n+i}(x,y)\partial_{n+i}$. Имеет место

Теорема 2. *Размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов (TM, Φ), сохраняющих слои, не превосходит* $n(3n+5)/2$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\nabla}$ вполне приводимая линейная связность на *TM*: $\tilde{\nabla}_{\delta_A}\delta_B = \Gamma^C_{AB}\delta_C$ с ненулевыми компонентами $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^{n+k}_{in+j} = \Gamma^{*k}_{ij}$. Нетрудно убедиться, что $\nabla\Phi = 0$, а любой инфинитезимальный автоморфизм сохраняет связность $\tilde{\nabla}$, т. е. из $\mathrm{L}_X\Phi_{AB} = 0$ следует $\mathrm{L}_X\Gamma^C_{AB} = 0$. Уравнения движений (4) можно представить в следующем виде

$$\xi^C\left(\nabla_C\Phi_{AB} - \Phi_{PB}S^P_{AC} - \Phi_{AP}S^P_{BC}\right) + \nabla_A\xi^P\Phi_{PB} + \nabla_B\xi^P\Phi_{AP} = 0, \quad (11)$$

где S^C_{AB} – компоненты тензора кручения *S* связности $\tilde{\nabla}$. Наряду с неизвестными функциями $\xi^A = (\xi^i, \xi^{n+i})$ – компонентами инфинитезимального движения – введем следующие функции:

$$\xi^A_B = \nabla_B\xi^A - \xi^P S^A_{BP}. \quad (12)$$

Тогда уравнения (4) примут вид:

$$\xi_{AB} - \xi_{BA} = 0, \quad (13)$$

где $\xi_{AB} = \Phi_{AP}\xi_B^P$. Учитывая, что векторное поле X проектируемо на базу, из (12) следует, что $\xi_{n+j}^i = 0$. Запишем уравнения (13) для различных серий индексов:

$$g_{ik}\xi_j^{n+k} - g_{kj}\xi_i^{n+k} = 0\,,\ g_{ik}\xi_j^k + g_{kj}\xi_{n+i}^{n+k} = 0\,,$$

$$g_{kj}\xi_i^k + g_{ik}\xi_{n+j}^{n+k} = 0\,,\ g_{ik}\xi_{n+j}^k - g_{kj}\xi_{n+i}^k = 0\,. \qquad (14)$$

Из этих уравнений следует, что на ξ_j^i, ξ_j^{n+i}, ξ_{n+j}^{n+i} накладывается $n(n-1)/2+n^2$ независимых связей.

Уравнения $\mathrm{L}_X\Gamma_{AB}^C = 0$ являются дифференциальными следствиями уравнений (4). Их можно представить в каноническом виде [1]:

$$\nabla_A\xi_B^C + \xi^K R_{ABK}^C = 0\,, \qquad (15)$$

где R_{ABK}^C – компоненты тензора кривизны связности $\tilde{\nabla}$.

Уравнения (15) вместе с уравнениями (12) разрешимы относительно производных от $2n+4n^2$ неизвестных функций ξ^A, ξ_B^A, на которые накладывается $n^2+(3n^2-n)/2$ алгебраических условий. Поэтому, если условия интегрируемости уравнений (12) и (15) выполняются тождественно, то размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов максимальна и равна $4n^2+2n-n^2-(3n^2-n)/2 = n(3n+5)/2$. Теорема доказана.

Рассмотрим произвольные инфинитезимальные автоморфизмы почти симплектической структуры Ф на ТМ. В случае, когда X – произвольное векторное поле на *TM*, уравнения (14) накладывают на неизвестные функции ξ^A, ξ_B^A $n(n-1)+n^2$ алгебраических условий и, следовательно, группа автоморфизмов не должна превосходить $4n^2+2n-2n^2+n = 2n^2+3n$. Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Максимальный порядок алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов почти симплектической структуры Ф на касательном расслоении ТМ равен* $2n^2+3n$.

Список литературы

1. *Шапуков Б.Н.* Автоморфизмы расслоенных пространств // Тр. геом. сем. КГУ. 1982. Т. 14. С. 97 – 108.

M. Sorokina

ABOUT AUTOMORPHISMS
OF ALMOST SYMPLECTIC STRUCTURE ON TANGENT
BUNDLE OF GENERALIZED LAGRANGE SPACE

We consider automorphisms of almost symplectic structure on tangent bundle of generalized Lagrange space. We determine maximum dimension of algebra Lie of infinitesimal automorphisms preserving fibre on tangent bundle.

УДК 514.756.2

А.В. Столяров
(Чувашский государственный педагогический университет)

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПЛОСКИХ СЕТЕЙ В КОНФОРМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Изучается геометрия плоской сети Σ_n, заданной в конформном (псевдоконформном индекса $l \neq 0$ или собственно конформном, $l = 0$) пространстве C_n; более детально исследуется внутренняя геометрия ортогональных чебышевской, геодезической сетей и n-сопряженных систем $\Sigma_n \subset C_n$.

На протяжении всего изложения индексы принимают следующие значения: $\lambda, \mu, \rho = \overline{0, n+1}$; $i, j, k, l, s, t = \overline{1, n}$.

1. Рассмотрим конформное пространство C_n (псевдоконформное или собственно конформное [12]); отнесем его к по-