множестве X_φ характеристических прямых точечного отображения $\varphi: \mathcal{P}_n \to P_n$ числовая функция, которая каждой характеристической прямой Λ ставит в соответствие единственное характеристическое число σ.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й Н.В. О семействах коллинеаций многомерных проективных пространств//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1989.Вып. 20.С.50-57.

2. Ч е х Э. Проективно-дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами. I//Чехосл.матем.ж.1952.Т .2.№1.С.91-107.

3. А н д р е е в Б.А. К геометрии дифференцируемого отображения $f: P_m \to \hat{P}_n$ $(m > n)$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1987.Вып.18.С.5.

4. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами//Геометрия 1963.Итоги науки/ВИНИТИ.М., 1965. С.65-107.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ И СУПЕРКОНГРУЭНЦИИ m-ПЛОСКОСТЕЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО n-ПРОСТРАНСТВА

А.Ф.М а с а г у т о в а

(Московский государственный педагогический институт)

В работе изучаются некоторые семейства m-мерных плоскостей эллиптического пространства S_n: конгруэнции и суперконгруэнции m-плоскостей, строятся канонические реперы.

1. Конгруэнцией m-плоскостей пространства S_n называется семейство m-плоскостей, зависящее от $n-m$ вещественных параметров. В общем случае m-плоскости конгруэнции заполняют все пространство S_n, причем через каждую точку некоторой области этого пространства проходит единственная m-плоскость конгруэнции. Те точки пространства S_n, в которых нарушается единственность прохождения m-плоскости конгруэнции, называются фокусами m-плоскостей конгруэнции. Теория конгруэнций m-плоскостей пространства S_n изучалась тензорным методом В.В.Вагнером [1], Б.А.Розенфельдом [2].

На грассманиане $\Gamma\rho^{S}_{n,m}$ $(m+1)(n-m)$-поверхности в пространстве S_N, где $N=\binom{n+1}{m+1}-1$, координатами точек которой являются грассмановы координаты $p^{i_0\dots i_m}$ плоскостей пространства S_n, конгруэнция m-плоскостей пространства S_n изображается $(n-m)$-поверхностью. Если обозначить касательные векторы к грассманиане $d\vec{p}=\omega^{au}\vec{e}_{au}$ $(a,b=0,1,\dots,m$; $u,v=m+1, m+2, \dots, n)$, то для векторов, касательных к этой $(n-m)$-поверхности, строки матрицы (ω^{au}) линейно зависят друг от друга $\omega^{au}=c^{au}_{ov}\omega^{ov}$.

Если за базисную точку X_0 m-плоскости принять точку этой $(n-m)$-поверхности, то дифференциальные формы ω^u можно рассматривать как дифференциальные формы $(n-m)$ – поверхности и уравнения Пфаффа этой $(n-m)$-поверхности можно записать в виде $\omega^a=0$. Дифференцируя эти уравнения внешним образом, мы получим $\omega^a_u \wedge \omega^u=0$ и в силу леммы Картана $\omega^a_u=b^a_{uv}\,\omega^v$, где

$$b^a_{uv}=b^a_{vu} \qquad (1)$$

Если мы отождествим формы ω^{au} с формами ω^v, получим, что в этом случае $c^{au}_{ov}=b^a_{uv}$, т.е. в силу (1): $c^{au}_{ov}=c^{av}_{ou}$

Конгруэнции m-плоскостей пространства S_n являются частным случаем конгруэнций m-поверхностей этого пространства, т.е. семейств m-поверхностей, зависящих от $(n-m)$ вещественных параметров и обладающих тем свойством, что через каждую точку некоторой области пространства проходит единственная m-поверхность семейства.

Если мы обозначим уравнения m-поверхности конгруэнции $f^u=f^u(x^0,x^1,\dots,x^n;u^{m+1},u^{m+2},\dots,u^n)$, то фокусы этой конгруэнции удовлетворяют условиям

$$\frac{\mathcal{D}(f^{m+1}, f^{m+2},\dots,f^n)}{\mathcal{D}(u^{m+1},u^{m+2},\dots,u^n)}=0. \qquad (2)$$

Поэтому в случае конгруэнции m-плоскостей фокусы, находящиеся на одной m-плоскости конгруэнции, образуют алгебраическую $(m-1)$-поверхность $(n-m)$-го порядка, определяемую уравнением (2). В частности, в случае $m=1$, т.е. конгруэнции прямых, на каждой прямой конгруэнции имеется $n-1$ фокусов. Поэтому имеет место

Т е о р е м а 1. В случае конгруэнции прямых пространства S_n с каждой прямой конгруэнции можно связать канонический репер первого порядка.

В этом случае сегреана [3] $\Sigma^{S}_{m,n-m-1}$ в бесконечно удаленной гиперплоскости касательного пространства $E_{(m+1)(n-m)}$ к грассманиане $\Gamma\rho^{S}_{n,m}$ является сегреаной $\Sigma^{S}_{1,n-2}$, представляющей собой алгебраическую поверхность, размерность и порядок которой равны $n-1$. Поэтому бесконечно удаленная $(n-2)$-плоскость $(n-1)$-плоскости пространства E_{2n-2}, касательной к $(n-1)$-поверхности, изображает конгруэнцию прямых на грассманиане $\Gamma\rho^{S}_{n,1}$, пересекающуюся с сегреаной $\Sigma^{S}_{1,n-1}$ в $n-1$ точках, каждая из которых определяет пучок прямых, проходящих через прямую конгруэнции. 2-плоскости этих пучков определяют на полярной (n-2)-плоскости прямой конгруэнции в пространстве S_n n-1 точек $E_2, E_3, \dots, E_n$, а центры этих пучков определяют на прямых конгруэнции точки $A_2, A_3, \dots, A_n$. За точки E_0 и E_1 репера, связанного с прямыми конгруэнции, можно выбрать точку A_2 и полярно-сопряженную с ней точку.

2. Будем называть суперконгруэнциями m-плоскостей пространства S_n такие k-семейства m-плоскостей, для которых k-плоскость, касательная к k-поверхности, изображающей конгруэнцию m-плоскостей на грассманиане $\Gamma\rho^{S}_{n,m}$, высекает из бесконечно удаленной $[(m+1)(n-m)-1]$-плоскости $(m+1)(n-m)$ -плоскости, касательной к грассманиане $\Gamma\rho^{S}_{n,m}$, $(k-1)$-плоскость, размерность которой равна разности размерностей $(m+1)(n-m)-1$ бесконечно удаленной плоскости и размерности $n-1$ сегреаны $\Sigma^{S}_{m,n-m-1}$. В этом случае пересечение этой $(k-1)$-плоскости с сегреаной $\Sigma^{S}_{m,n-m-1}$ состоит из конечного числа точек. Число k параметров суперконгруэнции определяется соотношением $k = m(n-m-1)+1$. Сегреана $\Sigma^{S}_{m,n-m-1}$ является алгебраической поверхностью порядка $\binom{n-1}{m}$, поэтому число точек пересечения – $\binom{n-1}{m}$.

Т е о р е м а 2. С каждой m-плоскостью суперконгруэнции m-плоскостей пространства S_n можно связать репер первого порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждая из $\binom{n-1}{m}$ точек пересечения $(k-1)$-плоскости с сегреаной $\Sigma^{S}_{m,n-m-1}$ определяет пучок m-плоскостей, проходящих через m-плоскость суперконгруэнции. Каждому такому пучку соответствует точка B_φ ($\varphi = 0, 1, \dots, \binom{n-1}{m}-1$) $(n-m-1)$-плоскости, полярной данной m-плоскости, по которой $(m+1)$-плоскость этого пучка пересекается с этой $(n-m-1)$ -плоскостью, и $(m-1)$-плоскость, по которой m-плоскость пучка пересекается с данной m-плоскостью, следовательно, полюс A_φ этой $(m-1)$-плоскости в данной m-плоскости. Таким образом, мы получаем $\binom{n-1}{m}$ точек A_φ в данной m-плоскости и столько же точек B_φ в полярной ей $(n-m-1)$-плоскости. Так как при $m>1$, $n>2$:

$$\binom{n-1}{m} > n-m, \quad \binom{n-1}{m} > m+1,$$

то при $m>1$, $n>2$ число точек A_φ больше $m+1$ и из этих точек всегда можно выбрать базис данной m-плоскости, а число точек B_φ больше $n-m$ и из этих точек всегда можно выбрать базис $(n-m-1)$-плоскости, полярной данной m-плоскости.

Библиографический список

1. З а г н е р В.В. Differential geometry of the family of $R'_k s$ in R_n and of the family of totally geodesic $S'_{k-1} s$ in S_{n-1} of positive curvature//Матем. сб. 1942. Т. 10. №3. С. 165-212.

2. Р о з е н ф е л ь д Б.А. Дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей//Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11. С. 283-308.

3. Р о з е н ф е л ь д Б.А., Половцева М.А., Рязанова Л.А., Юхтина Т. Сегреаны и квазисегреаны и их применение к геометрии семейств прямых и плоскостей//Изв. вузов. Математ. 1988. №5. С. 50-56.

УДК 514.75

О ДВОЙНЫХ ЛИНИЯХ ПАРЫ (f , Δ_2) В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_3

Г. М а т и е в а
(Ошский педагогический институт)

Рассматривается частичное отображение евклидова пространства E_3, порождаемое заданным семейством гладких линий, и исследуются двойные линии пары (f, Δ_2).

В области Ω евклидова пространства E_3 задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $x \in \Omega$ проходит одна линия этого семейства. Пусть область Ω отнесена к подвижному ортонормированному реперу $\mathcal{R}=(x,\vec{e}_i)$ ($i,j,k = 1,2,3$), который является репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\mathcal{R}$ имеют вид

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j \qquad (1)$$

Формы ω^i, ω_i^j удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства: $D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i$, $D\omega_i^k = \omega_i^\ell \wedge \omega_\ell^k$, $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$.
Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе. Ее обозначим через Σ_F. Так как репер $\mathcal{R}$ построен на касательных к линиям этой сети, имеем:

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j \quad (\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i, \ \Lambda_{31}^1 = 0). \qquad (2)$$

Формулы Френе для линии ω^1 имеют вид:

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{e}_1 \ (ds=\omega^1); \ \frac{d\vec{e}_1}{ds} = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2; \ \frac{d\vec{e}_2}{ds} = -\Lambda_{11}^2 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3; \ \frac{d\vec{e}_3}{ds} = -\Lambda_{21}^3 \vec{e}_2,$$

где Λ_{11}^2 -кривизна, Λ_{21}^3 -кручение линии ω^1.

Псевдофокус F_i^j ($i \neq j$) касательной $(x,\vec{e}_i)$ к линии ω^i сети Σ_F определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{x} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j} \vec{e}_i. \qquad (3)$$

Когда точка x смещается в области Ω, точка $F_3^2 \in (x,\vec{e}_3)$ опишет свою область $\widetilde{\Omega}$. Получим отображение $f: \Omega \to \widetilde{\Omega}$ такое, что $f(x) = F_3^2$.
Дифференцируя внешним образом (2) и применяя лемму Картана, получим: