УДК 514.76

***Ю. И. Шевченко*[1], *А. В. Вялова*[2]**
[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
[2] *Калининградский государственный технический университет, Россия*
ESkrydlova@kantiana.ru, vyalova.alexa@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-8

Линейные и проективные связности над гладким многообразием

Рассмотрены главные расслоения кореперов 1-го и 2-го порядков, а также фактор-расслоение центропроективных (коаффинных) кореперов. В расслоении линейных кореперов задана связность с помощью поля объекта связности. Определены тензоры кручения и кривизны этой линейной связности. Выделены особые связности: без кручения, без кривизны. Пространство линейной связности, лишенное кручения и кривизны, представляет собой аффинную группу, что послужило основанием для классического названия «аффинная связность».

При специализациях многообразия введены сильное и слабое условия проективности, позволяющие выделить соответствующие расслоения кореперов. Связности в этих главных расслоениях названы сильной и слабой проективными связностями.

В случае симметрической линейной связности, когда отсутствует кручение, рассмотрен объект классической проективной связности. Введены формы этой связности и найдены их структурные уравнения. Отсюда следует, что классическая проективная связность не является ни фундаментально-групповой, ни линейной

Поступила в редакцию 16.03.2023 г.

дифференциально-геометрической. Доказано, что объект кривизны этой связности образует квазитензор лишь в совокупности с объектом связности. Показано, что классическая проективная связность вырождается в отличную от исходной линейную связность на образе сечения некоторого однородного расслоения.

Ключевые слова: расслоение кореперов, линейная связность, тензоры кручения и кривизны, слабая и сильная проективные связности, классическая проективная связность

1. Расслоения над гладким многообразием

Рассмотрим n-мерное гладкое многообразие V_n со структурными уравнениями Лаптева [1; 2]:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i \big(i, j, \ldots = \overline{1, n}\big). \tag{1.1}$$

Продолжим их, то есть продифференцируем внешним образом и разрешим по лемме Лаптева (обобщенной лемме Картана [1; 2]):

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i, \tag{1.2}$$

причем трехиндексные формы удовлетворяют условиям

$$\omega_{jk}^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 \;\Leftrightarrow\; \omega_{[jk]}^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\omega_{[jk]}^i = \lambda_{jkl}^i \omega^l, \quad \lambda_{(jk)l}^i = 0, \;\; \lambda_{\{jkl\}}^i = 0, \tag{1.3}$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование, круглые скобки — симметрирование, а фигурные скобки — циклирование.

Продолжая структурные уравнения (1.2), получим

$$d\omega_{jk}^i = \omega_{jk}^l \wedge \omega_l^i - \omega_{lk}^i \wedge \omega_j^l - \omega_{jl}^i \wedge \omega_k^l + \omega^l \wedge \omega_{jkl}^i, \tag{1.4}$$

$$\omega_{j[kl]}^i = \lambda_{jklm}^i \omega^m, \quad \lambda_{j(kl)m}^i = 0, \;\; \lambda_{j\{klm\}}^i = 0. \tag{1.5}$$

Утверждение 1. *Над гладким многообразием V_n имеются главные расслоения кореперов $L(V_n), L^2(V_n)$ со структурными уравнениями (1.1, 1.2), (1.1, 1.2, 1.4), типовыми слоями которых являются линейные группы 1-го и 2-го порядков:*

$$L = GL(n), dimL = n^2\,; L^2 = GL^2(n),\ \ dimL^2 = \frac{1}{2}n^2(n+3),$$

причем группа L является факторгруппой группы L^2.

Свернем уравнения (1.4) по индексам i, j:

$$d\omega_k\ = -\omega_l \wedge \omega_k^l + \omega^l \wedge \omega_{kl}, \tag{1.6}$$

$$\omega_k\ = \omega_{ik}^i,\ \omega_{kl} = \omega_{ikl}^i,\ \ \omega_{[kl]} \equiv 0, \tag{1.7}$$

где символ $\equiv$ обозначает сравнение по модулю базисных форм ω^i.

Следствие. В расслоении линейных кореперов 2-го порядка $L^2(V_n)$ наряду с фактор-расслоением линейных кореперов 1-го порядка $L(V_n)$ присутствует фактор-расслоение центропроективных (коаффинных) кореперов $C(V_n)$ со структурными уравнениями (1.1, 1.2, 1.6), типовым слоем которого является коаффинная группа $C = GA^*(n)$.

2. Линейная связность

Зададим линейную связность в главном расслоении линейных кореперов $L(V_n)$ способом Лаптева — Лумисте [3; 4]. Преобразуем слоевые формы ω_j^i с помощью линейных комбинаций базисных форм ω^k:

$$\widetilde{\omega}_j^i = \omega_j^i - \Gamma_{jk}^i\omega^k. \tag{2.1}$$

Потребуем, чтобы функции Γ_{jk}^i удовлетворяли следующим дифференциальным уравнениям:

$$\Delta\,\Gamma_{jk}^i + \omega_{jk}^i = \Gamma_{jkl}^i\omega^l, \tag{2.2}$$

где тензорный дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\, \Gamma^i_{jk} = d\Gamma^i_{jk} + \Gamma^l_{jk}\omega^i_l - \Gamma^i_{lk}\omega^l_j - \Gamma^i_{jl}\omega^l_k.$$

Тогда преобразованные слоевые формы (1) удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\widetilde{\omega}^i_j = \widetilde{\omega}^k_j \wedge \widetilde{\omega}^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l, \qquad (2.3)$$

где коэффициенты при внешних произведениях базисных форм выражаются по формуле

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^m_{j[k}\Gamma^i_{ml]}, \qquad (2.4)$$

причем альтернирование производится по крайним индексам в квадратных скобках.

Продолжим дифференциальные уравнения (2.2):

$$\Delta\, \Gamma^i_{jkl} + \Gamma^m_{jk}\omega^i_{ml} - \Gamma^i_{mk}\omega^m_{jl} - \Gamma^i_{jm}\omega^m_{kl} + \omega^i_{jkl} \equiv 0.$$

Проальтернируем эти дифференциальные сравнения по двум последним индексам и учтем условия (1.3_1, 1.5_1):

$$\Delta\, \Gamma^i_{j[kl]} + \Gamma^m_{j[k}\omega^i_{ml]} - \Gamma^i_{m[k}\omega^m_{jl]} \equiv 0. \qquad (2.5)$$

С помощью уравнений (2.2) получаются сравнения для второго слагаемого в формуле (2.4):

$$\Delta\, \Gamma^m_{j[k}\Gamma^i_{ml]} + \omega^m_{j[k}\Gamma^i_{ml]} + \Gamma^m_{j[k}\omega^i_{ml]} \equiv 0.$$

Вычтем их из сравнений (2.5) и воспользуемся формулой (2.4):

$$\Delta\, R^i_{jkl} \equiv 0. \qquad (2.6)$$

Внесем формы (2.1) в структурные уравнения (1.1):

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j + T^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \qquad (2.7)$$

где $T^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]}$. Альтернируя дифференциальные уравнения (2) и учитывая условие (1.3_1), получим

$$\Delta\, T^i_{jk} \equiv 0. \qquad (2.8)$$

Утверждение 2. *Линейная связность (в классической терминологии — аффинная связность) в главном расслоении линейных кореперов* $L(V_n)$ *задается формами (2.1), определенными с помощью компонент объекта связности* Γ^i_{jk}, *которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям (2.2). Формы линейной связности (2.1) подчиняются структурным уравнениям (2.3), содержащим компоненты объекта кривизны* R^i_{jkl}, *которые выражаются по формуле (2.4) через объект связности* Γ^i_{jk} *и его пфаффовы производные* Γ^i_{jkl}. *Компоненты* R^i_{jkl} *образуют тензор, так как удовлетворяют дифференциальным сравнениям (2.6). Внесение форм связности (2.1) в структурные уравнения базисных форм (1.1) преобразует их к виду (2.7), куда входят компоненты тензора кручения* T^i_{jk} *с дифференциальными сравнениями (2.8).*

Определение 1. Главное расслоение линейных кореперов $L(V_n)$, при более подробном обозначении $L_{n^2}(V_n)$, с заданным полем объекта Γ^i_{jk} называется *пространством линейной связности* $L_{n^2,n}$.

3. Особые линейные связности

Тензоры кручения T^i_{jk} и кривизны R^i_{jkl} позволяют выделить 3 особых линейных связности:

1) $T^i_{jk} = 0$ — линейная связность без кручения;

2) $R^i_{jkl} = 0$ — линейная связность без кривизны;

3) $T^i_{jk} = 0$, $R^i_{jkl} = 0$ — линейная связность без кручения и кривизны, иначе говоря, связность локально аффинного пространства.

В последнем случае уравнения (2.3), (2.7) становятся структурными уравнениями аффинной группы $GA(n)$:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \dot{\tilde{\omega}}^i_j, \;\; d\tilde{\omega}^i_j = \dot{\tilde{\omega}}^k_j \wedge \dot{\tilde{\omega}}^i_k, \tag{3.1}$$

где точка означает выполнение условий 3). Это послужило основанием для названия «аффинная связность» (см., напр., [5]), которое было дано до развития теории расслоенных пространств. Группа $GA(n)$ имеет линейную факторгруппу $GL(n)$ со структурными уравнениями (3.1_2).

4. Сильная и слабая проективные связности

Наряду с особыми линейными связностями на произвольном расслоении $L(V_n)$ можно специализировать само расслоение и получать другие связности. Выделим расслоение специальных линейных кореперов с помощью условия проективности

$$\omega_i^i = 0. \tag{4.1}$$

Замечание 1. В аффинной группе $GA(n)$ со структурными уравнениями (3.1) аналогичное равенство выделяет эквиаффинную подгруппу, а в линейной факторгруппе $GL(n)$ — специальную линейную подгруппу, изоморфную проективной группе $GP(n-1)$.

Из структурных уравнений (1.2) при $j=i$ следует

$$d\omega_i^i = \omega^k \wedge \omega_k .$$

Учтем условие (4.1) и разрешим полученное квадратичное уравнение по лемме Картана:

$$\omega_k = \mu_{kl}\omega^l, \;\; \mu_{[kl]} = 0. \tag{4.2}$$

Отталкиваясь от равенства (4.1), введем более общее условие

$$\omega_i^i = \nu_k\omega^k , \tag{4.3}$$

продолжение которого имеет вид

$$\Delta\nu_k + \omega_k \equiv 0. \tag{4.4}$$

Назовем (4.1) сильным условием проективности, а (4.3) — слабым условием проективности.

При выполнении условия (4.3) с помощью обозначения (2.1) получим

$$\widetilde{\omega}_i^i = \gamma_k\omega^k, \;\; \gamma_k = \nu_k - \Gamma_k, \;\; \Gamma_k = \Gamma_{ik}^i. \tag{4.5}$$

Уравнения (2.2) и сравнения (4.4) дают $\Delta\gamma_k \equiv 0$. В рассматриваемом случае формулы (4.3) и (4.5₁) аналогичны. Более того, если тензор γ_k аннулируется, то $\widetilde{\omega}^i_i = 0$, что подобно условию (4.1), и тогда $\nu_k = \Gamma_k$.

Определение 2. Расслоение линейных кореперов $L(V_n)$ с условием (4.1) назовем *сильным расслоением проективных кореперов* и обозначим $\dot{P}(V_n)$, а при выполнении условия (4.3) — слабым расслоением проективных кореперов $P(V_n)$. Линейные связности в расслоениях $\dot{P}(V_n)$ и $P(V_n)$ назовем соответственно сильной и слабой проективными связностями. Главные расслоения $\dot{P}(V_n)$ и $P(V_n)$ со связностями будем называть пространствами с сильной и слабой проективными связностями и обозначать $\dot{P}_{n^2-1,n}$ и $\mathrm{P}_{n^2-1,n}$.

Замечание 2. Пространства $\dot{P}_{n^2-1,n}$ и $\mathrm{P}_{n^2-1,n}$ с одной базой V_n и одинаковым типовым слоем — проективной группой $GP(n\text{-}1)$ — нельзя отождествить, так как в окрестности точки базы имеем разные формулы (4.1) и (4.3).

Утверждение 3. *Если слоевые формы ω^i_j удовлетворяют слабому условию проективности (4.3), в частности сильному условию проективности (4.1), то формы проективной связности $\widetilde{\omega}^i_j$ подчиняются аналогичному условию.*

Из дифференциальных уравнений (2.2) следует, что свертки Γ_k удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\Gamma_k + \omega_k = \Gamma_{kl}\omega^l \ (\Gamma_{kl} = \Gamma^i_{ikl}), \qquad (4.6)$$

которые с учетом следствия (4.2₁) из условия сильной проективности (4.1) принимают тензорный вид: $\Delta\Gamma_k \equiv 0$.

Замечание 3. Линейную связность с объектом Γ^i_{jk}, удовлетворяющим в случае выполнения равенства (4.1) условию $\Gamma_k = 0$, можно назвать *специальной сильной проективной связностью*.

5. Объект классической проективной связности

В общем случае слабое условие проективности (4.3) и тем более сильное условие (4.1) не выполняются, поэтому нельзя дать определение 2 и доказать утверждение 3. Это препятствие преодолевается при построении объекта классической проективной связности в пространстве симметрической линейной связности.

Утверждение 4. *Объект симметрической линейной связности* Γ^i_{jk} $(\Gamma^i_{[jk]} = 0)$ *и его свертка* $\Gamma_k = \Gamma^i_{ik}$ *позволяют построить объект классической проективной связности (см., напр., [6]):*

$$\Pi^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{1}{n+1}(\delta^i_j \Gamma_k + \delta^i_k \Gamma_j), \tag{5.1}$$

причем в силу симметрии компонент Γ^i_{jk} *объект* Π^i_{jk} *симметричен по нижним индексам:* $\Pi^i_{[jk]} = 0$.

Замечание 4. Построение шести объектов проективной связности по данному объекту несимметрической линейной связности произведено разными аппаратами в статьях [7; 8].

Из дифференциальных уравнений (2.2), (4.6) следует, что компоненты объекта Π^i_{jk} подчиняются следующим сравнениям:

$$\Delta\Pi^i_{jk} + \omega^i_{jk} - \frac{1}{n+1}(\delta^i_j \omega_k + \delta^i_k \omega_j) \equiv 0. \tag{5.2}$$

Свернем их по индексам i, j:

$$\Delta\Pi_k \equiv 0, \;\; \Pi_k = \Pi^i_{ik}.$$

Более того, формула (5.1) дает

$$\Pi_k = 0. \tag{5.3}$$

6. Формы классической проективной связности

По аналогии с формами линейной связности (2.1) введем формы проективной связности

$$\widehat{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Pi^i_{jk}\omega^k. \tag{6.1}$$

Замечание 5. Из формулы (6.1) и тождеств (5.3) следует $\widehat{\omega}^i_i = \omega^i_i$, то есть сумма диагональных форм не подвергается преобразованию.

Согласно формулам (2.1), (5.1) имеем

$$\widehat{\omega}_j^i = \widetilde{\omega}_j^i + \frac{1}{n+1}(\delta_j^i \Gamma_k + \delta_k^i \Gamma_j)\omega^k. \qquad (6.2)$$

С помощью структурных уравнений (1.1) получим

$$d\widehat{\omega}_j^i = d\widetilde{\omega}_j^i + \frac{1}{n+1}[\delta_j^i d\Gamma_k + \delta_k^i d\Gamma_j - (\delta_j^i \Gamma_l + \delta_l^i \Gamma_j)\omega_k^l]\wedge\omega^k.$$

Раскроем круглые скобки и воспользуемся дифференциальными уравнениями (4.6):

$$d\widehat{\omega}_j^i = d\widetilde{\omega}_j^i + \frac{1}{n+1}[(\delta_j^i \Gamma_{kl} + \delta_k^i \Gamma_{jl})\omega^l -$$

$$-\delta_j^i \omega_k - \delta_k^i \omega_j + \delta_k^i \Gamma_l \omega_j^l - \Gamma_j \omega_k^i]\wedge\omega^k.$$

Используем структурные уравнения (2.3):

$$d\widehat{\omega}_j^i = \widetilde{\omega}_j^k\wedge\widetilde{\omega}_k^i + [R_{jkl}^i - \frac{1}{n+1}(\delta_j^i \Gamma_{kl} + \delta_k^i \Gamma_{jl})]\omega^k\wedge\omega^l +$$

$$+\frac{1}{n+1}(\delta_k^i \Gamma_l \omega_j^l - \Gamma_j \omega_k^i - \delta_j^i \omega_k - \delta_k^i \omega_j)\wedge\omega^k. \qquad (6.3)$$

Преобразуем внешние произведения форм линейной связности с помощью равенств (6.2):

$$\widetilde{\omega}_j^k\wedge\widetilde{\omega}_k^i = \widehat{\omega}_j^k\wedge\widehat{\omega}_k^i + \frac{1}{(n+1)^2}\Gamma_j \omega^k\wedge\Gamma_k \omega^i -$$

$$-\frac{1}{n+1}(\widehat{\omega}_j^k \wedge \Gamma_k \omega^i + \Gamma_j \omega^k \wedge \widehat{\omega}_k^i).$$

В последнем выражении используем обозначение (6.1):

$$\widetilde{\omega}_j^k\wedge\widetilde{\omega}_k^i = \widehat{\omega}_j^k\wedge\widehat{\omega}_k^i - \frac{1}{n+1}\left(\omega_j^k\wedge\Gamma_k \omega^i + \Gamma_j \omega^k\wedge\omega_k^i\right) +$$

$$+\frac{1}{n+1}(\Gamma_j \Pi_{kl}^i + \Pi_{jk}^m \Gamma_m \delta_l^i)\omega^k\wedge\omega^l + \frac{1}{(n+1)^2}\Gamma_j \Gamma_k \omega^k\wedge\omega^i.$$

Подставим полученный результат в формулу (6.3), вынесем внешние произведения базисных форм и проальтернируем коэффициенты при этих произведениях с учетом симметрии компонент Π_{jk}^i:

$$d\widehat{\omega}_j^i = \widehat{\omega}_j^k \wedge\widehat{\omega}_k^i - \frac{1}{n+1}(\delta_j^i \omega_k + \delta_k^i \omega_j)\wedge\omega^k + \mathcal{R}_{jkl}^i \omega^k\wedge\omega^l, \quad (6.4)$$

$$\mathcal{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl} - \frac{1}{n+1}[\delta^i_j \Gamma_{[kl]} -$$

$$-(\Gamma_{j[k} + \Gamma_m \Pi^m_{j[k} + \tfrac{1}{n+1}\Gamma_j \Gamma_{[k})\delta^i_{l]}]. \quad (6.5)$$

Утверждение 5. Классическая проективная связность со структурными уравнениями (1.1), (1.6), (6.4) не является ни фундаментально-групповой [1—4], ни линейной дифференциально-геометрической [9] связностью над базой V_n. Однако над расслоением центропроективных кореперов $C(V_n)$ это линейная связность, непостоянная часть объекта кривизны которой выражается по формуле (6.5).

7. Квазитензорность объекта кривизны

Продолжим дифференциальные уравнения (4.6):

$$\Delta\Gamma_{kl} - \Gamma_m \omega^m_{kl} + \omega_{kl} \equiv 0.$$

Альтернируем эти сравнения:

$$\Delta\Gamma_{[kl]} - \Gamma_m \omega^m_{[kl]} + \omega_{[kl]} \equiv 0.$$

В случае полуголономности [10] многообразия V_n имеем $\omega^m_{[kl]} \equiv 0, \omega_{[kl]} \equiv 0$, поэтому $\Delta\Gamma_{[kl]} \equiv 0$, то есть $\Gamma_{[kl]}$ — антисимметрический тензор на многообразии V_n. Значит, $\delta^i_j \Gamma_{[kl]}$ — тензор.

Найдем дифференциальные сравнения для компонент 2-го слагаемого в квадратных скобках формулы (6.5):

$$\Delta(\Gamma_{j[k} + \Gamma_m \Pi^m_{j[k} + \tfrac{1}{n+1}\Gamma_j \Gamma_{[k})\delta^i_{l]} + (\omega_{j[k} + \omega_m \Pi^m_{j[k})\delta^i_{l]} \equiv 0.$$

Следовательно, компоненты $\mathcal{R}^i_{jkl}$ удовлетворяют следующим сравнениям:

$$\Delta\mathcal{R}^i_{jkl} + \tfrac{1}{n+1}(\omega_{j[k} + \omega_m \Pi^m_{j[k})\delta^i_{l]} \equiv 0. \quad (7.1)$$

Утверждение 6. *Дифференциальные сравнения (5.2), (7.1) показывают, что объект кривизны* $\mathcal{R}^i_{jkl}$ *классической проективной связности образует квазитензор лишь в совокупности с объектом этой связности* Π^i_{jk}.

8. Случай вырождения проективной связности

Уравнения (6.4) станут структурными уравнениями форм линейной связности лишь в особом случае, когда выполняются дифференциальные сравнения

$$\delta^i_j \omega_k + \delta^i_k \omega_j \equiv 0. \tag{8.1}$$

Сворачивая их по индексам i, j, получим $\omega_k \equiv 0$. Наоборот, из этих сравнений следуют сравнения (8.1). Соответствующие пфаффовы уравнения имеют вид

$$\omega_k = \Lambda_{kl}\omega^l, \tag{8.2}$$

где Λ_{kl} — некоторые функции. Продолжим эти уравнения и запишем результат в виде сравнений

$$\Delta \Lambda_{kl} + \omega_{kl} \equiv 0. \tag{8.3}$$

Альтернируя их и используя сравнения (1.7_3), получим

$$\Delta \Lambda_{[kl]} \equiv 0. \tag{8.4}$$

Подставим пфаффовы уравнения (8.2) в структурные уравнения (6.4):

$$d\widehat{\omega}^i_j = \widehat{\omega}^k_j \wedge \widehat{\omega}^i_k + \mathbb{R}^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l, \tag{8.5}$$

$$\mathbb{R}^i_{jkl} = \mathcal{R}^i_{jkl} + \frac{1}{n+1}\left(\delta^i_j \Lambda_{[kl]} - \Lambda_{j[k}\delta^i_{l]}\right). \tag{8.6}$$

В рассматриваемом случае сравнения (7.1) примут вид

$$\Delta \mathcal{R}^i_{jkl} + \frac{1}{n+1}\omega_{j[k}\delta^i_{l]} \equiv 0. \tag{8.7}$$

Дифференциальные сравнения (8.3), (8.4), (8.7) позволяют найти сравнения для компонент (8.6): $\Delta\, \mathbb{R}^i_{jkl} \equiv 0$.

Утверждение 7. *Классическая проективная связность становится линейной связностью на образе сечения (8.2) однородного расслоения $A_n^*(V_n)$ со структурными уравнениями (1.1), (1.6), где $A_n^* = GA^*\ (n)/GL(n)$ — коаффинное пространство размерности n. Эта отличная от исходной линейная связность имеет структурные уравнения (1.1),(8.5) и тензор кривизны (8.6).*

Список литературы

1. *Лаптев Г.Ф.* Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Труды 3-го Всесоюз. матем. съезда / АН СССР. М., 1958. Т. 3. С. 409—418.

2. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1966. Т. 1. С. 139—189.

3. *Лаптев Г.Ф.* Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Труды 4-го Всесоюз. матем. съезда. 1961. Т. 2. Л., 1964. С. 226—233.

4. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

5. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. 2-е изд. М., 1976.

6. *Veblen O.* Generalized projective geometry // J. Lond. Math. Soc. 1929. Vol. 4. P. 140—160.

7. *Гордеева И.А.* Шесть классов несимметрических метрических связностей // ДГМФ. 2007. Вып. 38. С. 33—38.

8. *Шевченко Ю.И., Вялова А.В.* Метрики пространства с линейной связностью, не являющейся полусимметрической // ДГМФ. 2022. Вып. 53. С. 148—160.

9. *Вагнер В.В.* Теория составного многообразия // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. М. ; Л., 1950. Вып. 8. С. 11—72.

10. *Шевченко Ю.И.* Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий // ДГМФ. 2015. Вып. 46. С. 168—177.

Для цитирования: *Шевченко Ю. И., Вялова А. В.* Линейные и проективные связности над гладким многообразием // ДГМФ. 2023. № 54 (2). С. 78—91. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-8.

MSC 2010: 53B05, 53C05, 58A10

Yu. I. Shevchenko[1], *A. V. Vyalova*[2]

[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14, A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236041, Russia
[2] *Kaliningrad State Technical University*
1, Sovietsky Prosp., Kaliningrad, 236022, Russia
ESkrydlova@kantiana.ru, vyalova.alexa@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-8

Linear and projective connections over a smooth manifold

Submitted on March 16, 2023

The principal bundles of the first order coframes and the second order coframes, as well as factor bundle of centroprojective (coaffine) coframes are considered. In the bundle of linear coframes a connection is given with the help of the field of connection object. The torsion and curvature tensors of this linear connection are determined. Special connections are singled out: torsion-free, curvature-free. The space of a linear connection devoid of torsion and curvature is an affine group, that served as the basis for classical name «affine connection».

Under the specializations of a manifold, strong and weak projectivity conditions was introduced, which make it possible to single out the coframe bundles. The connections in these principal bundles are called strong and weak projective connections.

In the case of symmetric linear connection, when the torsion is absent, the object of classic projective connection is considered. Connection forms are introduced and their structure equations are found. Hence it follows that classic projective connection is neither fundamental-group nor linear differential-geometric. It is proved, that the curvature object of this connection forms a quasitensor together with the connection object only. It is shown, that classic projective connection degenerates into different from the original linear connection on the image of a section of some homogeneous bundle.

Keywords: bundle of coframes, linear connection, torsion and curvature tensors, weak and strong projective connection, classic projective connection

References

1. *Laptev, G.F.:* Group-theoretic method in differential geometric investigation. Tr. 3rd All-Union Math. Congr., 3, 409—418 (1958).

2. *Laptev, G.F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. Tr. Geom. Sem., 1, 139—189 (1966).

3. *Laptev, G.F.:* Manifolds, imbedded in generalized spaces. Tr. 4th All-Union Math. Congr., 1961, 2. Leningrad, 226—233 (1964).

4. *Evtushik, L.E., Lumiste, Yu.G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.*: Differential-geometric structures on manifolds. Itogi Nauki i Tekhn. Probl. Geom., 9 (1979).

5. *Norden, A.P.:* Spaces with an affine connection. Moscow (1976).

6. *Veblen, O.:* Generalized projective geometry. J. Lond. Math. Soc., 4, 140—160 (1929).

7. *Gordeeva*, *I.:* Six classes of non-symmetric metric connections. DGMF, 38, 33—38 (2007).

8. *Shevchenko*, *Yu.I., Vyalova A.V.:* Metrics of a space with linear connection, which isn't semisymmetric. DGMF, 53, 148—160 (2022).

9. *Vagner, V.V.:* The theory of composite manifolds. Tr. Sem. Vect. and Tenz. Analysis, 8, 11—72 (1950).

10. *Shevchenko, Yu.I.:* Holonomic and semi-holonomic submanifolds of smooth manifolds. DGMF, 46, 168—177 (2015).

For citation: Shevchenko, Yu.I., Vyalova, A.V. Linear and projective connections over a smooth manifold. DGMF, 54 (2), 78—91 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-8.