6. *Белова О. О.* Индуцирование аналога связности Нейфельда на грассманподобном многообразии центрированных плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2014. Вып. 45. С. 23—29.

7. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

O. Belova

The curvature tensor of an analog of Neifeld's connection on the Grassman-like manifold of centered planes

The expression of the curvature object of Neifeld's connection on the Grassman-like manifold of centered planes by the components of the connection object, fundamental object of the 1st order and phaffian derivatives of the components of connection object are obtained. Finding the differential comparisons which components of curvature object satisfy we take into account four basic ways and one generalizing way of continuations of the equations for the Grassman-like manifold of centered planes. It is shown, that in every basic case the curvature object of Neifeld's connection is a tensor. It contains 2 elementary and 4 simple subtensors. Using a generalizing way we have a tensor in the differential equations for the components of curvature object. This tensor is called virtual as it vanishes in the basic cases.

УДК 514.76

К. М. Буданов
Пензенский государственный университет
ko13bud@rambler. ru

Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта над максимально подвижным пространством

Получено каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта над максимально подвижным пространством.

Ключевые слова: инфинитезимальное аффинное преобразование, расслоение Вейля второго порядка, связность полного лифта, максимально подвижное пространство.

1. Основные определения и понятия. В работе изучаются расслоения Вейля над четырехмерными алгебрами Вейля высоты 2 и ширины 2.

Базисы $\{e^0, e^1, e^2, e^3\}$ в этих алгебрах можно выбрать так, чтобы $e^0 = 1$, а остальные элементы удовлетворяли соотношениям

$$e^1e^2 = 0,\ e^1e^3 = 0,\ e^2e^2 = qe^3, \text{ где } q = \pm 1.$$

Обозначим эти алгебры через $W_4(2,2,q)$. Далее для краткости будем использовать обозначение A.

Пусть (M_n, ∇) — максимально подвижное пространство размерности n с аффинной связностью ∇ без кручения и M_n^A — расслоения Вейля над алгебрами Вейля A со связностью ∇^C — полным лифтом связности ∇ в расслоения Вейля M_n^A.

Пусть $\partial_i = \partial / \partial x^i$ — натуральный репер и Γ_{ij}^k — коэффициенты линейной связности ∇ в локальной карте (U, x^i) на многообразии M_n.

Известно [1], что связность ∇ максимально подвижного пространства в некоторой локальной карте имеет следующие компоненты:

$$\Gamma_{jk}^i = \delta_j^i \varphi_k + \delta_k^i \varphi_j\,, \tag{1}$$

где $\varphi_1 = \varphi_1(x^1)$, $\varphi_2 = ... = \varphi_n = 0$ — компоненты произвольного ковекторного поля, а тензорное поле кривизны имеет следующие компоненты:

$$R_{lsa}^i = \delta_a^i(\psi_{ls} - \psi_{sl}) + \delta_s^i \psi_{la} - \delta_l^i \psi_{sa}\,, \tag{2}$$

где

$$\psi_{ls} = \nabla_s \varphi_l + \varphi_l \varphi_s\,. \tag{3}$$

Из равенства (3) следует, что

$$\psi_{11} \neq 0, \tag{4}$$

а все остальные компоненты ψ_{ls} равны нулю.

2. Каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования $\widetilde{X}$ в расслоении Вейля со связностью полного лифта (M_n^A, ∇^C) над максимально подвижным пространством. В работе [2] было получено каноническое разложения произвольного инфинитезимального аффинного преобразования в расслоении Вейля со связностью полного лифта (M_n^A, ∇^C):

$$\begin{aligned}\widetilde{X} = D^{(0)} + H^{(1)} + N^{(2)} + T^{(3)} + A^{H_0\gamma_3} + B^{H_0\gamma_2} + C^{H_0\gamma_1} + \\ + E^{H_1\gamma_3} + F^{H_1\gamma_2} + \widetilde{G}^{H_1\gamma_1} + K^{H_2\gamma_3} + \widetilde{L}^{H_2\gamma_2} + \\ + M^{H_2\gamma_1} + \widetilde{P}^{H_3\gamma_3} + \widetilde{Q}^{H_3\gamma_2} + \widetilde{S}^{H_3\gamma_1},\end{aligned}$$

где D, H, N, T — векторные поля; A, B, C, E, F, $\widetilde{G}$, K, $\widetilde{L}$, M, $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$, $\widetilde{S}$ — тензорные поля типа (1, 1), заданные на M_n. Также сформулированы необходимые и достаточные условия существования такого разложения.

Рассмотрим систему уравнений, полученную из условий, накладываемых на компоненты тензоров A, B, C, E, K:

$$\begin{cases} A_m^i R_{lkj}^m = A_l^m R_{mjk}^i = A_j^m R_{lkm}^i = 0, \\ B_m^i R_{lkj}^m = B_l^m R_{mjk}^i = B_j^m R_{lkm}^i = 0, \\ C_m^i R_{lkj}^m = C_l^m R_{mjk}^i = C_j^m R_{lkm}^i = 0, \\ E_m^i R_{lkj}^m = E_l^m R_{mjk}^i = E_j^m R_{lkm}^i = 0, \\ K_m^i R_{lkj}^m = K_l^m R_{mjk}^i = K_j^m R_{lkm}^i = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Учитывая строение тензорного поля кривизны максимально подвижных пространств (2), получаем, что система уравнений (5) имеет только тривиальное решение:

$$A^i_j = B^i_j = C^i_j = E^i_j = K^i_j = 0\,. \qquad (6)$$

Далее интегрируем смешанную систему дифференциальных и алгебраических уравнений, полученную из условий, накладываемых на компоненты тензоров $\widetilde{G}$, $\widetilde{L}$, $\widetilde{P}$:

$$\begin{cases} \nabla_j \tilde{G}^i_k = 0,\ \nabla_j \tilde{L}^i_k = 0,\ \nabla_j \tilde{P}^i_k = 0,\ \tilde{G}^m_l R^i_{mjk} - \tilde{G}^i_m R^m_{ljk} = 0, \\ \tilde{L}^m_l R^i_{mjk} - \tilde{L}^i_m R^m_{ljk} = 0,\ \tilde{P}^m_l R^i_{mjk} - \tilde{P}^i_m R^m_{ljk} = 0, \\ 2\tilde{G}^m_l R^i_{mjk} - \tilde{G}^i_m R^m_{ljk} = 0,\ 2\tilde{L}^m_l R^i_{mjk} - \tilde{G}^i_m R^m_{ljk} = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Условия интегрируемости этой системы имеют вид

$$\tilde{G}^m_l \psi_{km} = \tilde{G}^m_k \psi_{ml} = \frac{1}{n}\breve{G}\psi_{kl},\ \tilde{P}^i_l = 2\tilde{G}^i_l = 2\tilde{L}^i_l,\ (\breve{G} = \tilde{G}^m_m). \qquad (8)$$

Свернем соотношения $\nabla_j \widetilde{G}^i_k = 0$ по i и k, тогда получим $\nabla_j \breve{G} = 0$. Следовательно, $\partial_j \breve{G} = 0$ и $\breve{G} = c_1$, где $c_1 = const$.

Интегрируя смешанную систему дифференциальных и алгебраических уравнений, полученную из условий, накладываемых на компоненты тензоров F и M:

$$\begin{cases} \nabla_j F^i_k = 0,\ \nabla_j M^{\ i}_{k} = 0,\ F^m_l R^i_{mjk} - F^i_m R^m_{ljk} = 0, \\ M^{\ m}_{l} R^i_{mjk} - M^{\ i}_{m} R^m_{ljk} = 0,\ F^m_l R^i_{mjk} + qM^{\ i}_{m} R^m_{ljk} = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Условия интегрируемости данной системы выражаются равенствами

$$F^m_l \psi_{km} = F^m_k \psi_{ml} = \frac{1}{n}\breve{F}\psi_{kl},\ F^i_l = -qM^{\ i}_{l}, \qquad (10)$$

где $\breve{F} = F^m_m$. Можно показать, что $\breve{F} = c_2$, где $c_2 = const$.

Объединяя все полученные результаты и учитывая условие (4), можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема. *Векторное поле* $\widetilde{X}$ *является инфинитезимальным аффинным преобразованием пространства* (M_n^A, ∇^C), *где* M_n *— максимально подвижное пространство, тогда и только тогда, когда*

$$\widetilde{X} = D^{(0)} + H^{(1)} + N^{(2)} + T^{(3)} + c_1(I^{H_1\gamma_1} + I^{H_2\gamma_2} + 2I^{H_3\gamma_3}) - \\ - c_2(qI^{H_1\gamma_2} - I^{H_2\gamma_1}) + c_3 I^{H_3\gamma_2} + c_4 I^{H_3\gamma_1}, \quad (11)$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4 = const$, I — единичный аффинор, D, H, N, T — векторные поля на многообразии M_n, удовлетворяющие условиям

$$(L_Z \nabla)^i_{jk} = 0, \ Z = D, H, N, T,$$

где L_Z — производная Ли в направлении векторного поля Z.

Представление векторного поля $\widetilde{X}$ в виде (11) — единственное.

Список литературы

1. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности // Ученые записки Пензенского педагогического института. Казань, 1965.

2. *Буданов К.М., Султанов А.Я.* Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта // Известия высших учебных заведений. Математика. 2015. №12. С. 3—13.

K. Budanov

Infinitesimal affine transformations of the second order Weil bundle with complete lift connection over maximally moving space

Canonical decomposition of infinitesimal affine transformation of Weil bundle second order with complete lift connection over maximally moving space is obtained.