УДК 514.75

Ю.И.Шевченко

СВЯЗНОСТИ В РАССЛОЕНИЯХ,АССОЦИИРОВАННЫХ С ПРОСТРАНСТВОМ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

Исследованы возможности введения связностей в двух расслоениях,ассоциированных с пространством квадратичных элементов проективного пространства.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$,деривационные формулы которого имеют вид

$$\begin{cases} dA = \theta A + \omega^I A_I \quad (I, J, \ldots = \overline{1,n}), \\ dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A, \end{cases} \tag{1}$$

где форма Пфаффа θ -множитель пропорциональности, а инвариантные формы ω^I, ω_I^J, ω_I проективной группы $GP(n)$ удовлетворяют структурным уравнениям (см.[1]):

$$\mathcal{D}\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \tag{2}$$

$$\mathcal{D}\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J + \omega_K \wedge \omega_I^{JK}, \tag{3}$$

$$\mathcal{D}\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J, \tag{4}$$

где $\omega_I^{JK} = \delta_I^J \omega^K + \delta_I^K \omega^J$. Форма θ удовлетворяет условию $\mathcal{D}\theta = \omega^I \wedge \omega_I$,вытекающему из требования полной интегрируемости системы (1).Из уравнений (3) получим

$$\mathcal{D}\omega_I^I = (n+1)\,\omega_I \wedge \omega^I, \tag{5}$$

откуда следует,что можно положить $\theta = -\frac{1}{n+1}\omega_I^I$.

Уравнения стационарности точки $M = xA + x^I A_I$ имеют вид

$$dx + x^I\omega_I = \vartheta x, \quad \nabla x^I + x\omega^I = \vartheta x^I, \tag{6}$$

где $\nabla x^I = dx^I + x^J\omega_J^I$,а ϑ -форма Пфаффа.Дифференцируя внешним образом уравнения (6),получим $\mathcal{D}\vartheta = \omega_I \wedge \omega^I$. Из уравнения (5) следует,что имеет смысл равенство $\vartheta = \frac{1}{n+1}\omega_I^I$.Подставляя значение $x = 0$ в уравнения (6),найдем

$$x^I\omega_I = 0, \quad \nabla x^I = \vartheta x^I. \tag{7}$$

В силу достаточной произвольности переменных x^I из первого уравнения (7) следуют равенства $\omega_I = 0$,которые являются уравнениями стационарности гиперплоскости,натянутой на вершины A_I.

В проективном пространстве P_n рассмотрим пространство R квадратичных элементов,т.е.множество всевозможных $(n-2)$-мерных квадрик Q_{n-2} (ср.[2]).Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_I\}$,помещая вершины A_I в гиперплоскость L_{n-1} квадратичного элемента Q_{n-2}, тогда уравнения последнего записываются в виде

$$x = 0, \quad F \overset{def}{=} a_{IJ}x^I x^J = 0 \quad (a_{IJ} = a_{JI}).$$

Дифференцируя левую часть второго равенства этой системы с использованием уравнений (7),получим

$$dF\big|_{x=0} = 2\vartheta F + \nabla a_{IJ}x^I x^J, \tag{8}$$

где

$$\nabla a_{IJ} = da_{IJ} - a_{IK}\omega_J^K - a_{KJ}\omega_I^K.$$

Требуя,чтобы правая часть соотношения (8) была пропорциональна F ,найдем

$$\nabla a_{IJ} = a_{IJ}\,\omega, \tag{9}$$

где ω -пфаффова форма.Дифференцируя внешним образом уравнения (9),получим

$$\mathcal{D}\omega = \frac{2}{n}(n+1)\,\omega^I \wedge \omega_I,$$

откуда и из равенства (5) следует, что можно положить

$$\omega = -\frac{2}{n}\,\omega^J_J. \qquad (10)$$

З а м е ч а н и е. Выбор формы ω в виде (10) обычно производится [2] для невырожденной квадрики Q_{n-2} за счет условия $\det(a_{IJ})=1$.

Итак, уравнения стационарности квадратичного элемента Q_{n-2} имеют вид

$$\omega_J = 0, \quad \Delta a_{IJ} \stackrel{def}{=} \nabla a_{IJ} - a_{IJ}\,\omega = 0.$$

Главные формы $\omega_J, \Delta a_{IJ}$ пространства R удовлетворяют структурным уравнениям (4) и следующим:

$$\mathcal{D}\Delta a_{IJ} = \omega^K_I \wedge \Delta a_{KJ} + \omega^K_J \wedge \Delta a_{IK} + \omega \wedge \Delta a_{IJ} + \omega_K \wedge \omega^K_{IJ}, \qquad (11)$$

где

$$\omega^K_{IJ} = \frac{2}{n} a_{IJ}\,\omega^K - (\delta^K_I\,\omega_{JL} + \delta^K_J\,\omega_{IL})\,\omega^L.$$

Из уравнений (4),(11) следует, что пространство R является [2,с.196] расслоением, базой которого служит многообразие Грассмана $Gr(n-1,n)$ гиперплоскостей L_{n-1}, а типовым слоем – множество квадрик Q_{n-2}, принадлежащих одной гиперплоскости L_{n-1}. Структурной группой расслоения R является линейная группа $GL(n) \subset GP(n)$, действующая в гиперплоскости L_{n-1}, причем ее действие совпадает с действием проективной группы $GP(n-1) \subset GL(n)$. Отвлекаясь от структурной группы, рассмотрим (см. [3]) пространство R как пространство тензорных опорных элементов, связность в котором задается по В.И.Близникасу [4] с помощью объекта Γ^K_{IJ} :

$$\nabla\Gamma^K_{IJ} - \Gamma^K_{IJ}\,\omega + \omega^K_{IJ} = \Gamma^{KL}_{IJ}\,\omega_L + \Gamma^{KLM}_{IJ}\,\Delta a_{LM}.$$

Если выполняются равенства $\Gamma^{KLM}_{IJ} = 0$, то будем говорить, что поле объекта Γ^K_{IJ} сужено на базу $Gr(n-1,n)$, а сам объект Γ^K_{IJ} определяет суженную связность в пространстве R .

О п р е д е л е н и е. Оснащением пространства R назовем присоединение к каждому квадратичному элементу Q_{n-2} точки B , не принадлежащей гиперплоскости L_{n-1} этого элемента.

Точку B зададим разложением $B = A + \lambda^J A_J$, причем

$$\nabla\lambda^J + \omega^J = \lambda^{JJ}\omega_J + \lambda^{JJK}\,\Delta a_{JK}.$$

Осуществляя частичное продолжение этих уравнений, получим $\nabla\lambda^{IJK} + \lambda^{IJK}\,\omega \equiv 0$, где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю форм $\omega_J, \Delta a_{IJ}$. Функции λ^{IJK} образуют тензор на пространстве R , следовательно, их обращение в нуль $\lambda^{IJK}=0$ имеет инвариантный смысл. Он состоит в том, что поле квазитензора λ^J сужено на базу $Gr(n-1,n)$. Значит, оснащение пространства R в этом случае является оснащением Бортолотти [7] многообразия Грассмана $Gr(n-1,n)$. Иначе, всем квадратичным элементам Q_{n-2} имеющим общую гиперплоскость L_{n-1} , ставится в соответствие одна и та же точка B .

Т е о р е м а 1. Оснащение пространства R позволяет задать в нем связность.

Доказательство сводится к охвату компонент объекта связности Γ^K_{IJ} по формулам

$$\Gamma^K_{IJ} = \frac{2}{n} a_{IJ}\,\lambda^K - (\delta^K_I\,a_{JL} + \delta^K_J\,a_{IL})\,\lambda^L.$$

Т е о р е м а 2. Сечение расслоения R дает возможность задать в нем суженную связность непосредственно (без помощи оснащения); если квадрики Q_{n-2} невырождены, то это сечение индуцирует два оснащения пространства R .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сечение расслоения R определяется уравнениями $\Delta a_{IJ} = a^K_{IJ}\,\omega_K$ (12), которые являются уравнениями n-мерного многообразия $\mathcal{M}_n$ квадратичных элементов Q_{n-2}. Продолжая уравнения (12), получим

$$\nabla a^K_{IJ} - a^K_{IJ}\,\omega + \frac{2}{n}(n+1)\,a_{IJ}\,\omega^K = a^{KL}_{IJ}\,\omega_L.$$

Объект связности Γ^{k}_{ij} охватывается следующим образом:

$$\Gamma^{k}_{ij} = \frac{1}{n+1}\left[a^{k}_{ij} - \frac{n}{2}\left(\delta^{k}_{i} a^{l}_{jl} + \delta^{k}_{j} a^{l}_{il} \right)\right],$$

причем он задан лишь на базе $Gr(n-1,n)$. Если образующий квадратичный элемент Q_{n-2} невырожден, то многообразие $\mathfrak{M}_n$ позволяет построить два оснащения пространства R по формулам:

$$\lambda^{k} = \frac{1}{2(n+1)}\, a^{k}_{ij} a^{ij}, \quad \lambda^{k} = \frac{n}{2(n+1)}\, a^{j}_{ij} a^{ik},$$

где a^{ij} -элементы матрицы, обратной к матрице (a_{ij}).

Рассмотрим теперь главное расслоение $G(R)$ со структурными уравнениями (2)-(4),(11), базой которого является пространство R , а типовым слоем - аффинная группа $G = GA(n) \subset GP(n)$ -группа стационарности гиперплоскости L_{n-1} квадратичного элемента Q_{n-2} . Связность в главном расслоении $G(R)$ по Лаптеву задается [5] с помощью форм

$$\begin{cases} \tilde{\omega}^{i} = \omega^{i} - \Gamma^{ij}\omega_{j} - \Gamma^{ijk}\Delta a_{jk}, \\ \tilde{\omega}^{j}_{i} = \omega^{j}_{i} - \Gamma^{jk}_{i}\omega_{k} - \Gamma^{jkl}_{i}\Delta a_{kl}, \end{cases} \qquad (13)$$

где компоненты объекта связности

$$\Gamma = \{ \Gamma^{ij}, \Gamma^{ijk}, \Gamma^{jk}_{i}, \Gamma^{jkl}_{i} \}$$

удовлетворяют сравнениям

$$\nabla\Gamma^{ij} - \Gamma^{ikl}\omega^{j}_{kl} - \Gamma^{ij}_{k}\omega^{k} \equiv 0, \qquad (14)$$

$$\begin{aligned} &\nabla\Gamma^{ijk} + \Gamma^{ijk}\omega - \Gamma^{ijk}_{l}\omega^{l} \equiv 0, \\ &\nabla\Gamma^{jk}_{i} - \Gamma^{jlm}_{i}\omega^{k}_{lm} + \omega^{jk}_{i} \equiv 0, \\ &\nabla\Gamma^{jkl}_{i} + \Gamma^{jkl}_{i}\omega \equiv 0 . \end{aligned} \qquad (15)$$

Объект $\{\Gamma^{ijk}, \Gamma^{jkl}_{i}\}$ является тензором, поэтому уравнения

$$\Gamma^{ijk} = 0, \quad \Gamma^{jkl}_{i} = 0 \qquad (16)$$

имеют инвариантный смысл, состоящий в том, что сужение поля остальных компонент $\{\Gamma^{ij}, \Gamma^{jk}_{i}\}$ объекта Γ на базу $Gr(n-1,n)$ является объектом связности в ассоциированном с многообразием Грассмана расслоении (ср.[6]) со структурными уравнениями (2)-(4), базой которого служит само многообразие, а типовым слоем - аффинная группа $GA(n)$.

Т е о р е м а 3. Оснащение пространства R позволяет задать связность в расслоении $G(R)$; если квадрики Q_{n-2} невырождены, то можно задать еще одну связность так, что их сужения на базу $Gr(n-1,n)$ совпадают.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Компоненты объекта связности Γ охватим по формулам (16) и следующим:

$$\Gamma^{ij} = -\lambda^{i}\lambda^{j}, \quad \Gamma^{jk}_{i} = \delta^{j}_{i}\lambda^{k} + \delta^{k}_{i}\lambda^{j}. \qquad (17)$$

Отметим, что при условиях (16) сравнения (14),(15) принимают вид

$$\nabla\Gamma^{ij} - \Gamma^{ij}_{k}\omega^{k} = 0, \quad \nabla\Gamma^{jk}_{i} + \omega^{jk}_{i} = 0. \qquad (18)$$

Если образующая квадрика Q_{n-2} невырождена, то компоненты объекта связности Γ можно охватить по формулам (17) и следующим:

$$\Gamma^{ijk} = -\lambda^{i} a^{jk}, \quad \Gamma^{jkl}_{i} = \delta^{j}_{i} a^{kl}. \qquad (19)$$

Охват подобъекта $\{\Gamma^{ij}, \Gamma^{jk}_{i}\}$ одинаковым образом в двух случаях объясняется тем, что равенства

$$\Gamma^{ikl}\omega^{j}_{kl} = 0 , \quad \Gamma^{jlm}_{i}\omega^{k}_{lm} = 0$$

выполняются тождественно в силу формул (19), поэтому сравнения (14),(15) во втором случае имеют тот же вид (18).

<u>П р и л о ж е н и е</u>. В соответствии с первой точкой зрения на пространство R (как расслоение) в теореме 2 показано, что n-мерное многообразие $\mathfrak{M}_n$ индуцирует связности в расслоении R . Другой роли произвольного многообразия $\mathfrak{M}$ квадратичных элементов Q_{n-2} соответствует вторая точка зрения на пространство R (как базу), а именно, связность расслоения $G(R)$, естественно, порождает связность в его сужении $G(\mathfrak{M})$ на базу $\mathfrak{M} \subset R$.

Например, для многообразия $\mathfrak{M}_n$ формы связности (13) принимают вид

$$\tilde{\omega}^I = \omega^I - \Pi^{IJ}\omega_J, \quad \tilde{\omega}^J_I = \omega^J_I - \Pi^{JK}_I \omega_K,$$

причем объект связности $\Pi = \{\Pi^{IJ}, \Pi^{JK}_I\}$ определяется фундаментальным объектом a^K_{IJ} многообразия $\mathfrak{M}_n$ и объектом связности Γ:

$$\Pi^{IJ} = \Gamma^{IJ} + \Gamma^{IKL} a^J_{KL}, \quad \Pi^{JK}_I = \Gamma^{JK}_I + \Gamma^{JLM}_I a^K_{LM},$$

поэтому по охватам объекта Γ из теоремы 3 строятся охваты объекта Π, задающего связность в ассоциированном с многообразием $\mathfrak{M}_n$ расслоении $G(\mathfrak{M}_n)$.

Список литературы

1. Лумисте Ю.Г. Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях.-Уч.зап.Тартуского ун-та, 1965, вып.177, с.6-41.

2. Малаховский В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.-Тр.геометр.семинара, т.2, М., 1969, с.179-206.

3. Близникене И.В. О геометрии секущей поверхности одного класса пространств тензорных опорных элементов с линейчатой базой.-Лит.мат.сб., 1969, т.9, №2, с.233-242.

4. Близникас В.И. Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов.-Лит.матем.сб., 1966, т.6, №2, с.141-209.

5. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.-Проблемы геометрии, 1979, т.9.

6. Шевченко Ю.И. Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1978, с.124-133.

7. Bortolotti E. Connessioni nelle varietá luogo di spazi.- Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1933, 3, 81-89.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.15 1984

УДК 514.75

Н.М.Шейдорова

О НОРМАЛИЗАЦИИ ДВУХСОСТАВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА.

В n-мерном проективном пространстве P_n строится нормализация по А.П.Нордену двухсоставного распределения $\mathcal{H}^r_m$ $(r < m < n-1)$. Так названа [2] пара распределений, состоящая из базисного распределения r-мерных плоскостей Π_r (Λ-распределения) и оснащающего распределения m-мерных плоскостей Π_m (M-распределения) с отношением инцидентности их соответствующих элементов в общем центре: $\Pi_r(A_0) \subset \Pi_m(A_0)$.

Индексы принимают следующие значения:

$$I, K = \overline{1,n}; \quad u, v = \overline{r+1,n}; \quad p, q, r = \overline{1,r}; \quad i, j = \overline{r+1,m}; \quad \alpha, \beta = \overline{m+1,n};$$

Оператор ∇ определим формулой, введенной в работе [2].

1. Пусть распределение $\mathcal{H}^r_m$ отнесено к реперу $\mathcal{R}^0$ [2] нулевого порядка. В репере $\mathcal{R}^0$ дифференциальные уравнения распределения $\mathcal{H}^r_m$ примут вид:

$$\begin{aligned}
&\omega^\alpha_p = \Lambda^\alpha_{pK}\omega^K_0; \quad \nabla\Lambda^\alpha_{pK} = \delta^\alpha_K \omega^0_p + \Lambda^\alpha_{pKI}\omega^I_0;\\
&\omega^i_p = M^i_{pK}\omega^K_0; \quad \nabla M^i_{pK} = -\Lambda^\alpha_{pK}\omega^i_\alpha + \delta^i_K\omega^0_p + M^i_{pKI}\omega^I_0; \qquad (1)\\
&\omega^\alpha_i = A^\alpha_{iK}\omega^K_0; \quad \nabla A^\alpha_{iK} - \Lambda^\alpha_{pK}\omega^p_i + \delta^\alpha_K\omega^0_i + A^\alpha_{iKI}\omega^I_0.
\end{aligned}$$

2. Найдем дифференциальные уравнения полей некоторых геометрических объектов распределения $\mathcal{H}^r_m$ относительно