УДК 514.75

О. О. Белова

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Индуцированная связность Нейфельда на центрированном многообразии Грассмана

В n-мерном проективном пространстве рассмотрено центрированное многообразие Грассмана (семейство плоскостей, проходящих через одну точку). Над ним возникает главное расслоение касательных линейных реперов, типовым слоем которого является линейная группа, действующая в касательном пространстве к центрированному многообразию Грассмана. В этом расслоении задается связность Нейфельда. Показано, что объекты кривизны и кручения связности Нейфельда — тензоры. Доказано, что оснащение Бортолотти индуцирует данную связность.

Ключевые слова: проективное пространство, центрированное многообразие Грассмана, главное расслоение, оснащение Бортолотти, связность Нейфельда, тензор кручения, тензор кривизны.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ $(I, \ldots = \overline{1, n})$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I ,\ dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A , \tag{1}$$

причем формы Пфаффа ω^I, ω_I^J, ω_I удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$ [1]

$$\begin{gathered} D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I,\ \ D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J, \\ D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I . \end{gathered} \tag{2}$$

В пространстве P_n рассмотрим центрированное многообразие Грассмана V^*, то есть многообразие всех m-мерных плоскостей L_m, проходящих через фиксированную точку. Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$ ($a,\ldots=\overline{1, m}$; $\alpha,\ldots=\overline{m+1, n}$), помещая вершину A в данную точку, а вершины A_a — на центрированную плоскость $L_m^{*}=[A, A_a]$. При фиксации точки A получим тождество $\omega^I=0$. Из формул (1) следует, что формы ω_a^α базисными. Они удовлетворяют вытекающим из выражений (2) структурным уравнениям

$$D\omega_a^\alpha=\omega_b^\beta\wedge\Omega_{a\beta}^{\alpha b}, \qquad (3)$$

где

$$\Omega_{a\beta}^{\alpha b}=\delta_a^b\omega_\beta^\alpha-\delta_\beta^\alpha\omega_a^b. \qquad (4)$$

Находим внешние дифференциалы от форм (4)

$$D\Omega_{a\beta}^{\alpha b}=\Omega_{c\beta}^{\gamma b}\wedge\Omega_{a\gamma}^{\alpha c}+\omega_c^\gamma\wedge\Omega_{a\beta\gamma}^{\alpha bc}, \qquad (5)$$

где $\Omega_{a\beta\gamma}^{\alpha bc}=-\delta_a^b\delta_\gamma^\alpha\omega_\beta^c-\delta_\beta^\alpha\delta_a^c\omega_\gamma^b$.

Над центрированным многообразием Грассмана V^* возникает главное расслоение касательных линейных реперов L (V^*) со структурными уравнениями (3), (5). Типовым слоем расслоения L (V^*) является линейная группа, действующая в касательном пространстве к многообразию V^*. В главном расслоении L (V^*) зададим связность Нейфельда [2; 3] способом Лаптева — Лумисте.

Замечание. Термин «связность Нейфельда» предложен А. П. Норденом [4].

Введем новые формы

$$\tilde{\Omega}_{a\beta}^{\alpha b}=\Omega_{a\beta}^{\alpha b}-\Gamma_{a\beta\gamma}^{\alpha bc}\omega_c^\gamma. \qquad (6)$$

Рассмотрим дифференциалы форм (6)

$$D\tilde{\Omega}_{a\beta}^{\alpha b}=\tilde{\Omega}_{c\beta}^{\gamma b}\wedge\tilde{\Omega}_{a\gamma}^{\alpha c}+\omega_c^\gamma\wedge(\Delta\Gamma_{a\beta\gamma}^{\alpha bc}+\Omega_{a\beta\gamma}^{\alpha bc})-$$
$$-\Gamma_{e\beta\gamma}^{\eta bc}\Gamma_{a\eta\mu}^{\alpha ed}\omega_c^\gamma\wedge\omega_d^\mu. \qquad (7)$$

Связность в главном расслоении L (V^*) задается с помощью поля объекта связности $\Gamma=\{\Gamma_{a\beta\gamma}^{\alpha bc}\}$ на базе V^* уравнениями

$$\Delta\Gamma^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} + \Omega^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha bcd}_{a\beta\gamma\mu}\omega^{\mu}_{d}\,, \qquad (8)$$

где оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Gamma^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} = d\Gamma^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha bd}_{a\beta\gamma}\omega^{c}_{d} + \Gamma^{\alpha dc}_{a\beta\gamma}\omega^{b}_{d} + \Gamma^{\mu bc}_{a\beta\gamma}\omega^{\alpha}_{\mu} -$$
$$-\Gamma^{\alpha bc}_{a\beta\mu}\omega^{\mu}_{\gamma} - \Gamma^{\alpha bc}_{a\mu\gamma}\omega^{\mu}_{\beta} - \Gamma^{\alpha bc}_{d\beta\gamma}\omega^{d}_{a}\,.$$

Осуществим оснащение Бортолотти центрированного многообразия Грассмана V^*, которое состоит в присоединении к каждой m-плоскости L^*_m многообразия V^* $(n-m-1)$-плоскости P_{n-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью L^*_m. Плоскость P_{n-m-1} зададим системой точек $B_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a$. Дифференциалы базисных точек оснащающей плоскости P_{n-m-1} имеют следующий вид:

$$dB_\alpha = (\omega^{\beta}_{\alpha} + \lambda^{b}_{\alpha}\omega^{\beta}_{b})B_\beta + (\Delta\lambda^{a}_{\alpha} + \omega^{a}_{\alpha} - \lambda^{a}_{\beta}\lambda^{b}_{\alpha}\omega^{\beta}_{b})A_a\,.$$

Требуя относительную инвариантность плоскости P_{n-m-1}, получим

$$\Delta\lambda^{a}_{\alpha} + \omega^{a}_{\alpha} = \lambda^{ab}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{b}\,. \qquad (9)$$

Оснащение Бортолотти, задаваемое полем квазитензора $\{\lambda^a_\alpha\}$ на многообразии V^*, позволяет охватить компоненты объекта связности Γ

$$\Gamma^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} = -\delta^{b}_{a}\delta^{\alpha}_{\gamma}\lambda^{c}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{c}_{a}\lambda^{b}_{\gamma}\,.$$

Эти функции в силу уравнений (9) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (8). Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Оснащение Бортолотти центрированного многообразия Грассмана индуцирует связность Нейфельда в ассоциированном расслоении* L *(V^*).*

Подставляя в уравнения (3) базисных форм ω^α_a формы связности (6), получим

$$D\omega^{\alpha}_{a} = \omega^{\beta}_{b} \wedge \tilde{\Omega}^{\alpha b}_{a\beta} + S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}\omega^{\beta}_{b} \wedge \omega^{\gamma}_{c}\,,$$

где $S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha[bc]}_{a[\beta\gamma]}$.

Учитывая дифференциальные сравнения (7) компонент объекта связности Γ, приходим к следующим сравнениям по модулю базисных форм:

$$\Delta S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} \equiv 0 \pmod{\omega^{\alpha}_{a}}\,.$$

Теорема 2. *Объект кручения* $S = \{S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}\}$ *связности Нейфельда* Γ *является тензором.*

Учитывая в уравнениях (7) уравнения (8), находим

$$D\tilde{\Omega}^{\alpha b}_{a\beta} = \tilde{\Omega}^{\gamma b}_{c\beta} \wedge \tilde{\Omega}^{\alpha c}_{a\gamma} + R^{\alpha bcd}_{a\beta\gamma\mu}\,\omega^{\gamma}_{c} \wedge \omega^{\mu}_{d}\,,$$

где $R^{\alpha bcd}_{a\beta\gamma\mu} = \Gamma^{\alpha b[cd}_{a\beta[\gamma\mu]} - \Gamma^{\eta b[c}_{e\beta[\gamma}\Gamma^{\alpha ed]}_{a\eta\mu]}$.

Продолжая уравнения (8), получим

$$\Delta\Gamma^{\alpha bcd}_{a\beta\gamma\mu} + \Gamma^{\alpha bd}_{a\beta\gamma}\omega^{c}_{\mu} + \Gamma^{\alpha dc}_{a\beta\gamma}\omega^{b}_{\mu} + \Gamma^{\alpha bc}_{a\beta\mu}\omega^{d}_{\gamma} + \Gamma^{\alpha bc}_{a\mu\gamma}\omega^{d}_{\beta} -$$
$$-\delta^{\alpha}_{\mu}\Gamma^{\eta bc}_{a\beta\gamma}\omega^{d}_{\eta} - \delta^{d}_{a}\Gamma^{\alpha bc}_{e\beta\gamma}\omega^{e}_{\mu} \equiv 0\,,$$

поэтому $\Delta R^{\alpha bcd}_{a\beta\gamma\mu} \equiv 0$.

Теорема 3. *Объект кривизны* $R = \{R^{\alpha bcd}_{a\beta\gamma\mu}\}$ *связности Нейфельда* Γ *является тензором.*

Список литературы

1. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

2. *Норден А.П.* Проективные метрики на грассмановых многообразиях // Изв. вузов. Матем. 1981. №11. С. 80—83.

3. *Малахальцев М.А.* О внутренней геометрии связности Нейфельда // Там же. 1986. №2. С. 67—69.

4. *Норден А.П.* Теория композиций // Проблемы геом. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. М., 1978. Т. 10. С. 117—145.

O. Belova

Induced Neifeld connection on the centered Grassman manifold

The centered Grassman manifold (the family of the planes passing through one point) is considered in the n-dimensional projective space. Principal fiber bundle of tangent linear frames is arised above it, typical