зями имеют вид:

$$\Gamma_2^2=\Gamma_1^1\overset{df}{=}\mathcal{L},\ q^1_{21}=q^2_{12}=0,\ S=\frac{1}{\mathcal{L}}q^2_{11}q^1_{22}\ ,\qquad (2.$$

причем $S\neq0$, так как в противном нарушается биективное соотве

вие между лучами прямолинейных конгруэнций.

Подставляя значения (2.8) в (2.5) и замыкая первые два ур

ния, получим:

$$\mathcal{L}=\text{const}.\qquad (2$$

Следовательно, конгруэнция цилиндров, допускающая индуциров

ное внешнее расслоение, существует с произволом четырех функ

одного аргумента.

Литература

1. В.С.Малаховский, Многообразия алгебраических элементов в мерном проективном пространстве. Геометрический сборник, вып Труды Томского ун-та, т.168, стр.28-42, 1963.

2. Г.Ф.Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многооб зий, Труды Московского математического общества, 2, 1953, ГИТТ

3. В.С.Малаховский, Конгруэнция парабол в эквиаффинной геоме Геометрический сб., вып.2, Труды Томского ун-та, 1962, 161, 76-

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

вып 2 1971

СВЕШНИКОВА Г.Л.

КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЕМЯ ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ.

В трехмерном проективном пространстве рассматриваются конгру нции коник [1], три фокальных поверхности которых вырождаются линии и точки. Конгруэнцией $[h,k]$ называется конгруэнция коник, которой h фокальных поверхностей вырождаются в линии, k фо альных поверхностей вырождаются в точки. Исследованы конгруэнции 3,0], [2,1], [1,2].

§ 1. Конгруэнции [3,0].

Пусть фокальные поверхности $(A_{\alpha'})$ $(\alpha'=1,2,3)$ конгруэнции оник C вырождаются в линии, причем касательные ℓ_i $(i,j,k=1,2)$ линиям (A_i) в точках A_i не инцидентны плоскости коники.

Отнесем конгруэнцию $[3,0]$ к реперу $R\equiv\{A_\alpha\}$, $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$, де A_4 — точка, лежащая вне плоскости коники. Инфинитезимальные еремещения репера R определяются деривационными формулами:

$$d\bar{A}_\alpha=\omega_\alpha^\beta\bar{A}_\beta\ ,$$

ричем пфаффовы формы ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры:

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$$

и эквипроективности.

Уравнения коники C и система уравнений Пфаффа конгруэн[3,0] при соответствующей нормировке вершин приводятся к вид

$$x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3 = 0, \quad x^4 = 0. \qquad (1$$

$$\left.\begin{aligned} &\omega_i^3 = \Gamma_i^{3i}\omega_i; \quad \omega_i^j + \omega_i^3 = b_i\omega_i; \quad \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k; \\ &\omega_3^1 = b\,\omega_3^4; \quad \omega_3^1 + \omega_3^2 = b_3\omega_3^4; \quad \omega_i^i - \omega_3^3 = b_i^k\omega_k \end{aligned}\right\} \quad (1$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i и j сумм вание не производится.

Из анализа системы уравнений (I.2) следует, что конгруэнц [3,0] существуют и определяются с произволом трех функций д аргументов.

Пусть ℓ — линия пересечения плоскостей, проходящих чер сательные к конике в точках A_i и прямые ℓ_i; M – точка сечения прямой ℓ с плоскостью коники; M_i – точки пересеч прямых ℓ_i с прямой ℓ.

Помещаем вершину A_4 репера на прямую ℓ в четвертую г ническую к точке M относительно точек M_i. Тогда

$$b_1 = 0, \ b_2 = 0, \ \Gamma_k^{3k} = 0.$$

При

$$b_3 = 0, \ b = 0$$

касательная к фокальной линии (A_i) проходит через точку A_4 тема уравнений Пфаффа, определяющая конгруэнцию [3,0] при у виях (I,4) запишется так :

$$\left.\begin{aligned} &\omega_i^3 = (-1)^{i-1}\Gamma_1^{31}\omega_i, \ \omega_i^j + \omega_i^3 = 0, \ \omega_3^1 = \omega_3^2 = 0, \ \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k, \\ &\omega_4^i = t_i\omega_3^4, \ \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k, \ \omega_i^i - \omega_3^3 = b_i^k\omega_k. \end{aligned}\right\} \quad (1.5)$$

Определение. Конгруэнция [3,0] называется конгруэнцией F_1, если для неё выполняются условия:

$$b_3 = b = 0, \ t_1 = t_2, \ \Gamma_1^{31} = -b_1^1, \ b_i^j = 0, \ b_1^1 + b_2^2 = 0. \quad (1.6)$$

Теорема I.I. Конгруэнции F_1 существуют и определяются с произволом трех функций одного аргумента.

Доказательство непосредственно следует из анализа системы (I.5) и условий (I.3) и (I.6).

Деривационные формулы репера запишутся в виде:

$$d\bar{A}_1 = \omega_1^1\bar{A}_1 + [b_1^1(\bar{A}_2 - \bar{A}_3) + \bar{A}_4]\omega_1, \ d\bar{A}_2 = \omega_2^2\bar{A}_2 + [-b_1^1(\bar{A}_1 - \bar{A}_3) + \bar{A}_4]\omega_2,$$

$$d\bar{A}_3 = \omega_3^3\bar{A}_3 + \Gamma_3^{4k}\omega_k\bar{A}_4, \ d\bar{A}_4 = t_1\Gamma_3^{4k}\omega_k(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 - \bar{A}_3) + \omega_4^4\bar{A}_4. \quad (1.7)$$

Теорема I.2. Прямолинейная конгруэнция (A_3A_4), ассоциированная с конгруэнцией F_1, вырождается в линейчатую поверхность. Прямая A_4M неподвижна.

Доказательство. Используя деривационные формулы (I.7), получаем

$$d[A_3A_4] = (\omega_3^3 + \omega_4^4)[\bar{A}_3\bar{A}_4] + \omega_4^1[\bar{A}_3\bar{M}]; \ d[\bar{A}_4\bar{M}] = -2\omega_3^3[\bar{A}_4\bar{M}],$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

Теорема I.3. Конгруэнция F_1 имеет только одну невырождающуюся фокальную поверхность. Фокальные линии (A_i) являются плоскими сдвоенными линиями.

Доказательство. Уравнения для определения фокальных семейств и фокусов конгруэнции F_1 приводятся к виду:

$$\left.\begin{aligned} x^1x^2+x^1x^3+x^2x^3=0,\ x^4=0, \\ x^3 b_1^1(x^1\omega_1 - x^2\omega_2)=0,\ (x^1+x^3\Gamma_3^{41})\omega_1+(x^2+x^3\Gamma_3^{42})\omega_2=0 \end{aligned}\right\} \quad (1.$$

Из системы (I.7), кроме фокусов A_i, которые являются сдвоенны-ми, и фокуса A_3, находим фокус

$$\bar{F}=\bar{A}_1+p_1\bar{A}_2+p_2\bar{A}_3, \quad (1.$$

где

$$p_1=\frac{\Gamma_3^{42}-2}{2-\Gamma_3^{41}}, \qquad p_2=\frac{\Gamma_3^{42}-2}{\Gamma_3^{41}-\Gamma_3^{42}}.$$

В силу (I.7) для любого $n=1,2,3\ldots$ получаем:

$$(d^n\bar{A}_i\bar{A}_i\bar{M}\bar{A}_4)=0,$$

что и доказывает вторую часть теоремы.

§ 2. Конгруэнции [2,I].

Вершины A_i репера $R\equiv\{A_\alpha\}$ конгруэнции [2,I] помещаем в фокальные точки коники C, которые описывают линии, вершину A в полюс прямой A_1A_2 относительно коники, вершину A_4 – на пр-мую ℓ.

Единичную точку $\bar{E}=\bar{A}_1+\bar{A}_2$ выбираем на прямой A_1A_2 так, чтобы прямая A_3E проходила через неподвижный фокус F.

Уравнения коники C и система пфаффовых уравнений конгр-ции [2,I] при надлежащей нормировке вершин приводятся соответ-венно к виду:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\quad x^4=0 \quad (2$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_i^j=0;\quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3i}\omega_i,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\quad \omega_3^4=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1+\omega_2), \\ \omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k,\quad \omega_i^i-\omega_3^3=\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1^3+\omega_2^3-2\omega_3^i), \end{aligned}\right\} \quad (2.2)$$

причем

$$\Gamma_4^{ii}+\Gamma_j^{ij}\Gamma_3^{ii}=0. \quad (2.3)$$

Из (2.2) и (2.3) следует, что конгруэнции [2,I] существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Пусть B_i – точка пересечения прямой ℓ_i с прямой ℓ. Помещая вершину A_4 репера на прямой ℓ так, чтобы $(A_4A_3;B_1B_2)=-1$, будем иметь:

$$\Gamma_k^{3k}=0. \quad (2.4)$$

Определение. Конгруэнцией F_2 называется конгруэнция [2,I], для которой существуют расслоения от конгруэнции коник C к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) [2] и от прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) [3].

Из определения конгруэнции F_2 следует, что

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_4^{12}=-\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12}-m^2,\quad \Gamma_4^{21}=\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{21}-m^2, \\ \Gamma_3^{12}=\Gamma_3^{21},\quad \Gamma_1^{31}(\Gamma_4^{12}+\Gamma_4^{21})=0,\quad 2\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12}-\Gamma_4^{12}+\Gamma_4^{21}=0. \end{aligned}\right\} \quad (2.5)$$

При $\Gamma_4^{12}+\Gamma_4^{21}=0$ получаем вырождение прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) в линейчатую поверхность, чего быть не может. Значит $\Gamma_1^{31}=0$ и система уравнений Пфаффа приведется в силу (2.3), (2.4), (2.5) к виду:

$$\left.\begin{aligned} \omega_i^j=\omega_i^3=\omega_4^3=0,\quad \omega_3^1=a\omega_1+b\omega_2,\quad \omega_3^2=b\omega_1+c\omega_2, \\ \omega_3^4=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1+\omega_2),\quad \omega_4^i=-m^2\omega_j,\quad \omega_i^i-\omega_3^3=-\sqrt{2}\,\omega_3^i, \end{aligned}\right\} \quad (2.6)$$

$$dm^2 + m^2(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\,\omega_4^4) = 0, \qquad (2$$

где

$$\Gamma_3^{11} = a,\ \Gamma_3^{22} = c,\ \Gamma_3^{12} = \Gamma_3^{21} = b,\ m^2 = \Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - (\Gamma_3^{12})^2. \qquad (2$$

Исходя из условий (2.6), можно осуществить последнюю норм
ровку вершин репера R так, чтобы

$$m^2 = -1. \qquad (2.$$

Тогда получим связь

$$b^2 - ac = 1. \qquad (2$$

Т е о р е м а 2.2. Конгруэнции F_2 существуют и опреде
ляются с произволом двух функций одного аргумента.

Анализируя систему уравнений (2.6) с учетом условий (2.8)
(2.9), получаем утверждение теоремы 2.2.

Т е о р е м а 2.3. Конгруэнции F_2 имеют одну сдвоенну
вырождающуюся фокальную поверхность (P), фокальные линии (
являются плоскими.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определения фокальных п
верхностей и фокальных семейств конгруэнции коник F_2 имеем
систему:

$$\left.\begin{aligned} & x^3\left[\tfrac{1}{2}x^3(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3) + x^1\omega_3^2 + x^2\omega_3^1\right] = 0, \\ & (x^1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}x^3)\,\omega_1 + (x^2 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}x^3)\,\omega_2 = 0, \\ & (x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2$$

Из этой системы, кроме фокальных точек A_i и F, получаем с
енную фокальную точку:

$$\bar{P} = \bar{A}_1 + \frac{c}{a}\bar{A}_2 - \sqrt{\frac{2c}{a}}\,\bar{A}_3.$$

фокальные линии (A_i) плоские, так как

$$(d^n\bar{A}_i\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_4) = 0, \quad (n = 1,2,3\ldots) \qquad (2.11)$$

Т е о р е м а 2.4. Фокальное семейство поверхности (P) соответствует одному семейству торсов прямолинейной конгруэнции (A_3A_4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, фокальное семейство (P) и торсы конгруэнции (A_3A_4) определяются соответственно формулами:

$$\sqrt{a}\,\omega_1 + \sqrt{c}\,\omega_2 = 0, \quad a(\omega_1)^2 - c(\omega_2)^2 = 0.$$

§ 3. Конгруэнции [I,2].

Вершины A_i репера $R = \{A_\alpha\}$ конгруэнции [I,2] помещаем в неподвижные фокальные точки коники C, вершину A_3 — в полюс прямой A_1A_2 относительно коники. Единичную точку $\bar{E} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2$ выбираем на прямой A_1A_2 так, чтобы прямая A_3E проходила через фокальную точку F коники, которая описывает линию.

Уравнения коники C и система уравнений Пфаффа конгруэнции [I,2] приводятся при соответствующей нормировке вершин к виду:

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0 \qquad (3.1)$$

$$\left\{\begin{aligned} & \omega_1^2 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = 0; \quad \omega_2^1 = \omega_2^3 = \omega_2^4 = 0, \quad \omega_3^4 = \Gamma_{3k}^4\omega^k, \\ & \omega_1^1 - \omega_3^3 = a_2^1(\lambda\omega_3^1 + \omega_3^2) - \sqrt{2}\,\omega_3^1, \quad \omega_2^2 - \omega_3^3 = a_2^2(\lambda\omega_3^1 + \omega_3^2) + \lambda\sqrt{2}\,\omega_3^1, \end{aligned}\right. \qquad (3.2)$$

где

$$\lambda = \frac{\Gamma_{31}^4}{\Gamma_{32}^4}.$$

Дифференцируя уравнения (3.2) внешним образом и анализиру[я] полученную при этом систему квадратичных уравнений, получае[м], конгруэнции [I,2] существуют и определяются с произволом од[ной] функции двух аргументов.

Конгруэнции [I,2] имеют в общем случае одну невырождающ[уюся] фокальную поверхность, описываемую точкой

$$\bar{F}^* = \bar{A}_1 + \lambda^2 \bar{A}_2 - \sqrt{2}\,\lambda \bar{A}_3 .$$

Литература

I. Н.Г.Туганов, О конгруэнции линий второго порядка в трехмер[ном] проективном пространстве. ДАН СССР, I955, т. I00, №I.

2. В.С.Малаховский, Конгруэнции коник, порожденные расслояемо[й] парой C_ℓ. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, (Труды Калининградского университета), I970, стр. 5-26.

3. С.П.Фиников, Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., I956.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

I97I

вып 2

ТКАЧ Г.П.

ПАРЫ КОНГРУЭНЦИЙ ПАРАБОЛ В ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Определение 1. Назовем пару фигур $F = \{F_1, F_2\}$ квадратичной, если одна из фигур F_1 является квадратичным элементом, вторая - F_2 является k-плоскостью $(0 \le k < n-1)$ или квадратичным элементом [I].

Определение 2 Квадратичная пара $F = \{F_1, F_2\}$ называется нецентральной, если каждый квадратичный элемент, входящий в пару, является нецентральным.

Для $n=3$ квадратичными парами являются пары $F = \{F_1, F_2\}$, где F_1 — парабола, а F_2 — точка, прямая или парабола.

В данной работе ограничимся рассмотрением двупараметрического семейства нецентральных квадратичных пар в трехмерном эквиаффинном пространстве, т.е. пар конгруэнций парабол. Такие двупараметрические семейства назовем парами B.

§ I. Пары B с непараллельными плоскостями парабол.

Рассмотрим сначала общий случай, когда плоскости парабол F_i