УДК 514.75

ЦЕНТРОПРОЕКТИВНЫЕ СВЯЗНОСТИ В НОРМАЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

П.А. Ф и с у н о в

(Чувашский государственный педагогический университет)

Рассматриваются нормальные связности на оснащенной регулярной гиперполосе H_m, погруженной в n-мерное проективное пространство P_n. Показано, что на оснащенной гиперполосе $\mathrm{H}_m \subset \mathrm{P}_n$ в расслоении нормалей первого рода индуцируются четыре центропроективные связности. Найдены инвариантные условия их совпадения. Указаны признаки того, чтобы нормальная связность была плоской или полуплоской.

В статье индексы принимают следующие значения:

$$\bar{J},\bar{K},\bar{L}=\overline{0,n};\ J,K,L,P,Q=\overline{1,n};\ i,j,k,s,t=\overline{1,m};\ \bar{i},\bar{j},\bar{k}=\overline{0,m};$$

$$u,v,w=\overline{m+1,n-1};\alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n};\ \bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}=0,\overline{m+1,n};\ p=\overline{1,3};\ \bar{p}=\overline{0,3}.$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений репера $\{A_{\bar{J}}\}$ проективного пространства P_n имеют вид:

$$dA_{\bar{J}}=\omega_{\bar{J}}^{\bar{K}}A_{\bar{K}}, \tag{1}$$

где дифференциальные формы Пфаффа $\omega_{\bar{J}}^{\bar{K}}$ удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства [11]:

$$D\omega_{\bar{J}}^{\bar{K}}=\omega_{\bar{J}}^{\bar{L}}\wedge\omega_{\bar{L}}^{\bar{K}},\ \omega_{\bar{L}}^{\bar{L}}=0. \tag{2}$$

Регулярная гиперполоса [2] $\mathrm{H}_m \subset \mathrm{P}_n$ в репере первого порядка задается уравнениями [6]:

$$\omega_o^\alpha=\omega_v^n=0,\ \omega_i^n=\Lambda_{ij}^n\omega_o^j,\ \omega_i^v=\Lambda_{ij}^v\omega_o^j,\ \ \omega_v^i=N_{vj}^i\omega_o^j. \tag{3}$$

Продолжая уравнения системы (3), имеем:

$$\nabla\Lambda_{ik}^n+\Lambda_{ik}^n\omega_o^o=\Lambda_{ikj}^n\omega_o^j,\ \Lambda_{i[kj]}^n=0, \tag{4}$$

$$\nabla\Lambda_{ik}^v+\Lambda_{ik}^v\omega_o^o+\Lambda_{ik}^n\omega_n^v=\Lambda_{ikj}^v\omega_o^j,\ \Lambda_{i[kj]}^v=0, \tag{5}$$

$$\nabla N_{vj}^i+N_{vj}^i\omega_o^o-\delta_j^i\omega_v^o=N_{vjk}^i\omega_o^k,\ N_{v[jk]}^i=0. \tag{6}$$

В силу регулярности ($\Lambda\overset{def}{=}\left|\Lambda_{ij}^n\right|\neq 0$) гиперполосы тензор первого порядка Λ_{ij}^n невырожден; следовательно, можно ввести в рассмотрение обращенный тензор Λ_n^{ik}:

$$\Lambda_n^{ik}\Lambda_{kj}^n=\delta_j^i,\ \ \nabla\Lambda_n^{ij}-\Lambda_n^{ij}\omega_o^o=-\Lambda_n^{is}\Lambda_n^{tj}\Lambda_{stk}^n\omega_o^k. \tag{7}$$

Функция Λ есть относительный инвариант первого порядка:

$$d\ln\Lambda=2\omega_i^i-m(\omega_o^o+\omega_n^n)+\Lambda_k\omega_o^k,\ \Lambda_k=\Lambda_n^{ji}\Lambda_{ijk}^n.$$

Известно [8], [6], что регулярная гиперполоса $H_m \subset P_n$ внутренним образом порождает поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик:

$$\Lambda^n_{ij} x^i x^j + \frac{2\Lambda_i}{m+2} x^i x^n + B^n_{uv} x^u x^v + 2b_u x^u x^n + S_n (x^n)^2 = 2x^0 x^n . \tag{8}$$

Пусть гиперполоса $H_m \subset P_n$ нормализована в смысле Нордена-Чакмазяна [4], [15] полями нормалей первого $N_{n-m}(\nu)$ и второго $N_{m-1}(\nu)$ родов, определяемых полями квазитензоров ν^i_n и ν^o_i соответственно:

$$\nabla \nu^i_n + \omega^i_n = \nu^i_{nk} \omega^k_o , \;\; \nabla \nu^o_i + \omega^o_i = \nu^o_{ik} \omega^k_o . \tag{9}$$

Условием взаимности [4] нормализации гиперполосы $H_m \subset P_n$ относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (8) является выполнение соотношений [6]:

$$\nu^o_i = \frac{\Lambda_i}{m+2} + \Lambda^n_{ij} \nu^j_n . \tag{10}$$

Заметим, что определяемые [10] в третьей дифференциальной окрестности поля нормалей Фубини Φ^i_n, Φ^o_i

$$\Phi^i_n = \frac{1}{2} \Lambda^{ij}_n \left(B_j - \frac{\Lambda_j}{m+2} \right), \;\; \Phi^o_j = \frac{1}{2} \left(B_j + \frac{\Lambda_j}{m+2} \right) \tag{11}$$

и Вильчинского $(-W^i_n), W^o_i$

$$W^i_n = B^{ik} W_{nk} \, , \; W^o_i = \Lambda^n_{ik} (-W^k_n) + \frac{\Lambda_i}{m+2} \tag{12}$$

нормализуют гиперполосу $H_m \subset P_n$ взаимно.

Система функций $\{T^i_n\}$

$$T^i_n \stackrel{def}{=} W^i_n + \Phi^i_n , \;\; dT^i_n - T^i_n \omega^n_n + T^j_n \omega^i_j = T^i_{nj} \omega^j_o \tag{13}$$

образует тензор третьего порядка.

Поля геометрических объектов $\{\nu^i_n\}$, $\{\nu^i_n, a^v_n, \nu^o_n\}$, $\{\nu^o_v\}$ определяют [7] оснащение в смысле Э.Картана [17] гиперполосы $H_m \subset P_n$ полем плоскостей $N_{n-m-1}(\nu) \subset N_{n-m}(\nu)$:

$$\nabla \nu^o_n + \nu^j_n \omega^o_j + a^u_n \omega^o_u + \omega^o_n = \nu^o_{nk} \omega^k_o , \; \nabla \nu^o_v + \omega^o_v = \nu^o_{vk} \omega^k_o . \tag{14}$$

Геометрия регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ получается (см. монографию [6]) из той части геометрии голономного гиперполосного распределения $H \subset P_n$ [9], которая определяется полями фундаментальных подобъектов. Рассматривая результаты работы [13] на гиперполосе $H_m \subset P_n$, имеем следующие три теоремы:

Теорема 1. На оснащенной в смысле Нордена-Картана регулярной гиперполосе $H_m \subset P_n$ в расслоении нормалей первого рода индуцируются четыре центропроективные связности $\overset{\bar{p}}{\nabla}{}^{\perp}$, определяемые системами форм $\{\overset{\bar{p}}{\Theta}{}^{\bar{\beta}}_{\alpha}\}$:

$$\begin{gathered}
\overset{\bar{p}}{\Theta}{}^o_n = \omega^o_n + \nu^i_n \omega^o_i + a^v_n \omega^o_v - \nu^o_j (\nu^j_{nk} \omega^k_o + a^v_n \omega^j_v - \nu^j_n \nu^i_n \omega^n_i) + \nu^o_n \overset{\bar{p}}{\Gamma}{}^n_{nj} \omega^j_o \, , \\
\overset{\bar{p}}{\Theta}{}^o_v = \omega^o_v - \nu^o_j \omega^j_v \, , \; \overset{\bar{p}}{\Theta}{}^u_n = a^u_{nk} \omega^k_o + \nu^i_n \omega^u_i - a^u_n \nu^i_n \omega^n_i , \; \overset{\bar{p}}{\Theta}{}^n_v = 0, \\
\overset{\bar{p}}{\Theta}{}^n_n = \omega^n_n - \omega^o_o + \nu^o_i \omega^i_o + \nu^i_n \omega^n_i + \overset{\bar{p}}{\Gamma}{}^n_{nj} \omega^j_o \, , \; \overset{\bar{p}}{\Theta}{}^u_v = \omega^u_v - \delta^u_v (\omega^o_o - \nu^o_i \omega^i_o).
\end{gathered} \tag{15}$$

В качестве тензора Γ^n_{ni}

$$d\Gamma^n_{ni}+\Gamma^n_{ni}\omega^o_o-\Gamma^n_{nj}\omega^j_i=\Gamma^n_{nij}\omega^j_o \qquad (16)$$

можно брать охваты

$$\overset{o}{\Gamma}{}^n_{ni}=0,\ \overset{1}{\Gamma}{}^n_{ni}=\frac{\Lambda_i}{m+2}-\nu^o_i+\Lambda^n_{ij}\nu^j_n,\ \overset{2}{\Gamma}{}^n_{ni}=B_i-\nu^o_i-\Lambda^n_{ij}\nu^j_n,\ \overset{3}{\Gamma}{}^n_{ni}=\Lambda^n_{ij}T^j_n. \qquad (17)$$

Каждая система форм $\{\overset{\bar p}{\Theta}{}^{\bar\beta}_\alpha\}$ удовлетворяет структурным уравнениям Картана-Лаптева [3]

$$D\overset{\bar p}{\Theta}{}^{\bar\beta}_\alpha=\overset{\bar p}{\Theta}{}^\gamma_\alpha\wedge\overset{\bar p}{\Theta}{}^{\bar\beta}_\gamma+\frac{1}{2}\overset{\bar p}{R}{}^{\bar\beta}_{\alpha st}\,\omega^s_o\wedge\omega^t_o. \qquad (18)$$

Замечание. Так как $\overset{o}{\Gamma}{}^n_{ni}=0$, то из равенств (15) следует, что на гиперполосе H_m, в отличие от распределения $H\subset P_n$, для определения связности $\overset{o}{\nabla}{}^\perp$ не требуется задания оснащения в смысле Картана.

Теорема 2. Нормальные связности $\overset{1}{\nabla}{}^\perp$ и $\overset{o}{\nabla}{}^\perp$ совпадают тогда и только тогда, когда нормализация гиперполосы $H_m\subset P_n$ является взаимной.

Следствие. На гиперполосе, нормализованной полями нормалей Фубини Φ^i_n, Φ^o_i или полями нормалей Вильчинского ($-W^i_n$), W^o_i, связности $\overset{1}{\nabla}{}^\perp$ и $\overset{o}{\nabla}{}^\perp$ совпадают.

Теорема 3. Нормальные связности $\overset{1}{\nabla}{}^\perp$, $\overset{2}{\nabla}{}^\perp$ и $\overset{o}{\nabla}{}^\perp$ совпадают тогда и только тогда, когда гиперполоса $H_m\subset P_n$ нормализована полями нормалей Фубини Φ^i_n, Φ^o_i.

Теорема 4. На оснащенной в смысле Нордена-Картана гиперполосе $H_m\subset P_n$ нормальные связности $\overset{1}{\nabla}{}^\perp$ и $\overset{2}{\nabla}{}^\perp$ совпадают тогда и только тогда, когда поле нормалей первого рода является полем нормалей Фубини Φ^i_n.

Действительно, рассматриваемые нормальные связности совпадают тогда и только тогда, когда $\overset{1}{\Gamma}{}^n_{ni}=\overset{2}{\Gamma}{}^n_{ni}$, т.е.

$$\frac{\Lambda_i}{m+2}-\nu^o_i+\Lambda^n_{ij}\nu^j_n=B_i-\nu^o_i-\Lambda^n_{ij}\nu^j_n.$$

Из последних равенств и соотношений (11) следует доказываемое утверждение.

В структурных уравнениях Картана-Лаптева (18) система функций $\{R^{\bar\alpha}_{\beta st}\}$ образует тензор кривизны нормальной связности $\nabla^\perp$. Согласно работе [16] нормальная связность $\nabla^\perp$ называется плоской, если ее тензор кривизны обращается в нуль; связность $\nabla^\perp$ называется полуплоской, если обращается в нуль подтензор $\{R^\alpha_{\beta st}\}$.

Выражения компонент тензоров кривизны нормальных связностей $\overset{\bar p}{\nabla}{}^\perp$ приведены в работе [14], íàïðèìåð:

$$\overset{\bar p}{R}{}^n_{nst}=2[\nu^i_{n[s}\Lambda^n_{|i|t]}-\nu^o_{[st]}]-\ 2\overset{\bar p}{\Gamma}{}^n_{n[st]}. \qquad (19)$$

Известно [6], что нормали первого рода $\Phi_n^i, (-W_n^i)$ в каждой точке гиперполосы $H_m \subset P_n$ определяют пучок нормалей первого рода:

$$\nu_n^i(\tau) = \tau T_n^i - W_n^i, \tag{20}$$

где τ - инвариантный параметр.

По аналогии с поверхностью $V_2 \subset P_3$ [18] гиперполосу $H_m \subset P_n$ назовем коинцидентной, если в каждой точке $A_0 \in H_m$ пучок нормалей (20) вырождается в одну нормаль. Очевидно, условием коинцидентности гиперполосы служит обращение в нуль тензора T_n^i (13). Тогда в силу соотношений (15) и (17) имеет место

Теорема 5. На оснащенной в смысле Нордена-Картана регулярной гиперполосе $H_m \subset P_n$ нормальные связности $\overset{3}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{o}{\nabla}{}^{\perp}$ совпадают тогда и только тогда, когда она коинцидентна.

Учитывая утверждение теоремы 3, имеем

Следствие. Регулярная гиперполоса $H_m \subset P_n$ коинцидентна тогда и только тогда, когда все четыре индуцируемые при её оснащении нормальные связности вырождаются в одну.

Определение. Пара, составленная из конгруэнции (n-m)-мерных плоскостей N_{n-m} с (n-m-1)-мерными подплоскостями N_{n-m-1} в каждой текущей точке и псевдоконгруэнции (m-1)-мерных плоскостей N_{m-1} в P_n называется односторонне расслояемой [12] от конгруэнции к псевдоконгруэнции, если между их элементами установлено взаимно однозначное соответствие и существует (n-m)-параметрическое семейство гиперповерхностей V_{n-1}^m ранга m с (n-m-1)-мерными плоскими образующими N_{n-m-1} [5], [1], касательные гиперплоскости которых проходят через соответствующие плоскости N_{m-1} псевдоконгруэнции.

Имеют место следующие два утверждения:

Теорема 6. Для того чтобы нормальная связность $\overset{o}{\nabla}{}^{\perp}$, индуцируемая на нормализованной гиперполосе $H_m \subset P_n$, была плоской, необходимо и достаточно, чтобы конгруэнция нормалей первого рода и псевдоконгруэнция нормалей второго рода составляли пару, односторонне расслояемую в сторону от нормали первого рода к нормали второго рода.

Теорема 7. Если на оснащенной в смысле Нордена-Картана гиперполосе $H_m \subset P_n$ касательная гиперплоскость гиперповерхности V_{n-1}^m, плоскими образующими которой являются оснащающие плоскости Картана N_{n-m-1}, проходит через нормаль второго рода, то индуцируемая нормальная связность $\overset{\bar{p}}{\nabla}{}^{\perp}$ является плоской тогда и только тогда, когда она полуплоская.

Согласно [6] на нормализованной гиперполосе $H_m \subset P_n$ в касательном расслоении индуцируется средняя [4] аффинная связность без кручения $\overset{o}{\nabla}$, которая будет римановой тогда и только тогда, когда обращается в нуль тензор $\nu_{[st]}^o - \nu_{n[s}^j \Lambda_{t]j}^n$. Доказана

Теорема 8. Нормальные связности $\overset{o}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{2}{\nabla}{}^{\perp}$ на оснащенной в смысле Нордена-Картана гиперполосе $H_m \subset P_n$ совпадают тогда и только тогда, когда средняя связность $\overset{o}{\nabla}$ является римановой.

Теорема 9. Если на оснащенной в смысле Нордена регулярной гиперполосе $H_m \subset P_n$ конгруэнция нормалей первого рода и псевдоконгруэнция нормалей второго рода составляют пару, односторонне расслояемую в сторону от нормали первого рода к нормали второго рода, то средняя связность $\overset{o}{\nabla}$ - риманова.

Действительно, если удовлетворяются условия теоремы 9, то по теореме 6 нормальная связность будет плоской, т.е. обращается в нуль тензор кривизны этой связности. Тогда (см. (19)) выполняются равенства: $\frac{1}{2}\overset{o}{R}{}^{n}_{nst} = \nu^{i}_{n[s}\Lambda^{n}_{|i|t]} - \nu^{o}_{[st]} = 0$.

Принимая во внимание теорему 8, имеем

Следствие. Если на оснащенной в смысле Нордена-Картана регулярной гиперполосе $H_m \subset P_n$ конгруэнция нормалей первого рода и псевдоконгруэнция нормалей второго рода составляют пару, односторонне расслояемую в сторону от нормали первого рода к нормали второго рода, то нормальные связности $\overset{o}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{2}{\nabla}{}^{\perp}$ совпадают.

Библиографический список

1. *Акивис М.А., Рыжков В.В.* Многомерные поверхности специальных проективных типов // Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда, 1961. Л.: Наука. 1964. Т.2. С.159-164.

2. *Вагнер В.В.* Теория поля локальных гиперполос // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1950. Вып.8. С.197-272.

3. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. мат. о-ва. 1953. Т.2. С.275-382.

4. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432 с.

5. *Савельев С.И.* Поверхности с плоскими образующими, вдоль которых касательная плоскость постоянна // Докл. АН СССР. 1957. Т.115. №4. С.663-665.

6. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий: Монография. 2-е изд. Чебоксары: Чуваш. пед. ин-т, 1994. 290 с.

7. *Столяров А.В.* Об оснащениях в смысле Э.Картана и Э.Бортолотти регулярной гиперполосы // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1991. Вып. 22. С.104-108.

8. *Столяров А.В.* О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы // Изв. вузов. Мат. 1975. №10. С.97-99.

9. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т.7. С.117-151.

10. *Столяров А.В.* Условие квадратичности регулярной гиперполосы // Изв. вузов. Мат. 1975. №11. С.106-108.

11. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. 432с.

12. *Фиников С.П.* Теория пар конгруэнций. М.: ГИТТЛ, 1956. 444 с.

13. *Фисунов П.А.* Центропроективные связности в расслоениях нормалей первого рода на неголономной гиперполосе / Чуваш. пед. ин-т. Чебоксары, 1998. 17 с. Деп. в ВИНИТИ РАН, №627-В98.

14. *Фисунов П.А.* О нормальных связностях, индуцируемых на оснащенной регулярной гиперполосе. Чуваш. пед. ун-т / Чебоксары, 1998. 20с. Деп. в ВИНИТИ РАН, №3394-В98.

15. *Чакмазян А.В.* Двойственная нормализация // Докл. АН АрмССР. 1959. Т.28. №4. С.151-157.

16. *Чакмазян А.В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий: Монография. Ереван: Армянск. пед. ин-т. 1990. 116 с.

17. *Cartan E.* Les éspaces á connexion projective // Тр.семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1937. Вып.4. С.147-159.

18. *Mihвilescu T.* Geometrie differentialâ projectivâ. Bucureşti Acad. RPR. 494 p.

P.À. F i s u n o v

CENTROPROJECTIVE CONNECTIONS IN NORMAL FIBERINGS OF REGULAR HYPERSTRIP OF PROJECTIVE SPACE

The normal connections on the equipped regular hyperstrip H_m immersed in projective space P_n are considered. It is shown, that on the equipped hyperstrip $H_m \subset P_n$ in fibering of normals of the first genus four centroprojective connections are induced. The invariant conditions of their coincidence are found. The indications are specified, that the normal connection was plain or semi-plain.

УДК 514.75

ДВОЙСТВЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

С.В. Ф и с у н о в а

(×óâàøñêèé ãîñóäàðñòâåííûé ïåäàãîãè÷åñêèé óíèâåðñèòåò)

Рассматриваются двойственные нормальные связности на оснащенном распределении гиперплоскостных элементов М, погруженном в n-мерное проективное пространство P_n. Доказано, что на оснащенном регулярном распределении гиперплоскостных элементов $M \subset P_n$ в расслоениях нормалей первого и второго родов индуцируются по шесть попарно двойственных центропроективных связностей. Найдены инвариантные условия совпадения связностей.