УДК 514.76

Н. А. Рязанов[1]
[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
ryazanov-92@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6712-6693
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-15

О дифференциальных уравнениях тензоров кривизны фундаментально-групповой и аффинной связностей

Рассмотрена фундаментально-групповая и аффинная связность. Для каждой связности показан подход, который позволяет найти дифференциальные уравнения на компоненты объекта кривизны соответствующей связности более быстрым путем, чем дифференцирование выражений этих объектов через объекты связности и их пфаффовы производные.

Ключевые слова: структурные уравнения Лаптева, фундаментально-групповая связность, аффинная связность, объект связности, тензор кривизны.

1. Фундаментально-групповая связность

Рассмотрим главное расслоение $G_r(M_n)$, базой которого служит n-мерное гладкое многообразие M_n, а типовым слоем является r-членная группа Ли G_r. Его структурные уравнения Лаптева имеют вид [1]

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j \quad (i, j, k, ... = \overline{1, n}), \tag{1}$$

$$D\omega^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge \omega^\alpha_i \quad (\alpha, \beta, \gamma, ... = \overline{n+1, n+r}). \tag{2}$$

Поступила в редакцию 28.01.2019 г.

Здесь D — символ внешнего дифференциала; $\wedge$ — знак внешнего умножения; ω^i — базисные линейные дифференциальные формы; ω^α — слоевые дифференциальные формы; ω_i^j — продолженные базисные формы; ω_i^α — продолженные слоевые формы; $C_{\beta\gamma}^\alpha$ — структурные константы группы Ли G_r, удовлетворяющие условиям антисимметрии по нижним индексам $C_{(\beta\gamma)}^\alpha = 0$, а также тождествам Якоби $C_{\beta\{\gamma}^\alpha C_{\delta\varepsilon\}}^\beta = 0$, где круглые скобки обозначают симметрирование, а фигурные — циклирование.

Для задания связности по Лаптеву (см., напр., [2]) в главном расслоении $G_r(M_n)$ введем формы связности

$$\Omega^\alpha = \omega^\alpha - \Gamma_i^\alpha \omega^i . \tag{3}$$

Дифференцируя формы (3) внешним образом с учетом (1, 2), получим:

$$\begin{gathered} D\Omega^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \Omega^\beta \wedge \Omega^\gamma + \omega^i \wedge (d\Gamma_i^\alpha - \Gamma_j^\alpha \omega_i^j + \Gamma_j^\beta \omega_\beta^\alpha + \omega_i^\alpha) - \\ - C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_i^\beta \Gamma_j^\gamma \omega^i \wedge \omega^j, \ \omega_\beta^\alpha = 2C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma . \end{gathered} \tag{4}$$

Компоненты объекта фундаментально-групповой связности Γ_i^α удовлетворяют дифференциальным уравнениям (см., напр., [3]):

$$\Delta\Gamma_i^\alpha + \omega_i^\alpha = \Gamma_{ij}^\alpha \omega^j , \tag{5}$$

где тензорный дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Gamma_i^\alpha = d\Gamma_i^\alpha - \Gamma_j^\alpha \omega_i^j + \Gamma_i^\beta \omega_\beta^\alpha .$$

Тогда уравнения (4) примут вид

$$D\Omega^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \Omega^\beta \wedge \Omega^\gamma + R_{ij}^\alpha \omega^i \wedge \omega^j, \ R_{ij}^\alpha = \Gamma_{[ij]}^\alpha - C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_i^\beta \Gamma_j^\gamma , \tag{6}$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование.

Утверждение 1. *Структурные уравнения для форм фундаментально-групповой связности Ω^α имеют вид (6₁). Они содержат компоненты объекта кривизны R^α_{ij}, выражающиеся по формуле (6₂).*

Продолжим уравнения (1, 2), то есть, дифференцируя внешним образом и применяя обобщенную лемму Картана, получим:

$$D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \ \omega^i_{[jk]} \cong 0;$$
$$D\omega^\alpha_i = \omega^j_i \wedge \omega^\alpha_j + \omega^\beta_i \wedge \theta^\alpha_\beta + \omega^j \wedge \omega^\alpha_{ij}, \ \theta^\alpha_\beta = \frac{1}{2}\omega^\alpha_\beta, \ \omega^\alpha_{[ij]} \cong 0, \tag{7}$$

где символ $\cong$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^j.

Рассмотрим объект кривизны $\{R^\alpha_{ij}\}$ с внешней точки зрения. Продифференцируем внешним образом уравнения (6_1) с учетом их самих, а также уравнений (1). Получим:

$$2C^\alpha_{\beta\gamma}C^\beta_{\delta\varepsilon}\Omega^\delta \wedge \Omega^\varepsilon \wedge \Omega^\gamma +$$
$$+(dR^\alpha_{ij} - R^\alpha_{kj}\omega^k_i - R^\alpha_{ik}\omega^k_j + 2C^\alpha_{\beta\gamma}R^\beta_{ij}\Omega^\gamma) \wedge \omega^i \wedge \omega^j = 0.$$

С учетом тождеств Якоби первое слагаемое обращается в нуль, второе слагаемое после подстановки форм связности Ω^γ (3) примет вид

$$(\Delta R^\alpha_{ij} - 2C^\alpha_{\beta\gamma}R^\beta_{ij}\Gamma^\gamma_k\omega^k) \wedge \omega^i \wedge \omega^j = 0\,.$$

Запишем последние уравнения в виде, удобном для разрешения их по лемме Лаптева [1]:

$$\left((\Delta R^\alpha_{ij} - 2C^\alpha_{\beta\gamma}R^\beta_{ij}\Gamma^\gamma_k\omega^k) \wedge \omega^j\right) \wedge \omega^i = 0.$$

Используя эту лемму, получим:

$$(\Delta R^\alpha_{ij} - 2C^\alpha_{\beta\gamma}R^\beta_{ij}\Gamma^\gamma_k\omega^k) \wedge \omega^j = \omega^j \wedge \tilde{\omega}^\alpha_{ij}, \quad \tilde{\omega}^\alpha_{[ij]} \cong 0. \tag{8}$$

Перенесем правую часть влево и вынесем общие базисные формы за скобку:

$$(\Delta R^\alpha_{ij} - 2C^\alpha_{\beta\gamma}R^\beta_{ij}\Gamma^\gamma_k\omega^k + \tilde{\omega}^\alpha_{ij}) \wedge \omega^j = 0.$$

Полученные уравнения разрешим по лемме Картана (см., напр., [4]):

$$\Delta R^{\alpha}_{ij} - 2C^{\alpha}_{\beta\gamma} R^{\beta}_{ij} \Gamma^{\gamma}_{k} \omega^{k} + \tilde{\omega}^{\alpha}_{ij} = \overline{R}^{\alpha}_{ijk} \omega^{k} .$$

Альтернируя по индексам i и j с учетом антисимметрии объекта кривизны R^{α}_{ij}, получим:

$$\Delta R^{\alpha}_{ij} + \tilde{\omega}^{\alpha}_{[ij]} = \left(\overline{R}^{\alpha}_{[ij]k} + 2C^{\alpha}_{\beta\gamma} R^{\beta}_{ij} \Gamma^{\gamma}_{k} \right) \omega^{k} .$$

Учитывая сравнения (8_2) по модулю базисных форм ω^{i}, получаем:

$$\Delta R^{\alpha}_{ij} = R^{\alpha}_{ijk} \omega^{k} . \qquad (9)$$

Утверждение 2. *Дифференциальные уравнения для компонент объекта кривизны фундаментально-групповой связности первого порядка имеют вид (9).*

2. Аффинная связность

Аффинная связность для n-мерного многообразия M_n определяется в расслоенном пространстве линейных корепеjров $L_{n^2}(M_n)$ путем задания объекта связности Γ^{i}_{jk}. Формы связности имеют вид [1]

$$\Omega^{i}_{j} = \omega^{i}_{j} - \Gamma^{i}_{jk} \omega^{k} . \qquad (10)$$

Дифференцируя их внешним образом с учетом ($1, 7_1$), получим

$$D\Omega^{i}_{j} = \Omega^{k}_{j} \wedge \Omega^{i}_{k} + \omega^{k} \wedge$$
$$\wedge (d\Gamma^{i}_{jk} + \Gamma^{l}_{jk}\omega^{i}_{l} - \Gamma^{i}_{lk}\omega^{l}_{j} - \Gamma^{i}_{jl}\omega^{l}_{k} + \omega^{i}_{jk}) - \Gamma^{l}_{jk}\Gamma^{i}_{lt}\omega^{k} \wedge \omega^{t} . \qquad (11)$$

Компоненты объекта аффинной связности Γ^i_{jk} удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl}\omega^l , \qquad (12)$$

где тензорный дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Gamma^i_{jk} = d\Gamma^i_{jk} + \Gamma^l_{jk}\omega^i_l - \Gamma^i_{lk}\omega^l_j - \Gamma^i_{jl}\omega^l_k .$$

Тогда уравнения (11) можно переписать в виде

$$D\Omega^i_j = \Omega^k_j \wedge \Omega^i_k + (\Gamma^i_{jkl} - \Gamma^t_{jk}\Gamma^i_{tl})\omega^k \wedge \omega^l .$$

Альтернируя коэффициенты в последнем слагаемом по индексам k и l, введем обозначение

$$D\Omega^i_j = \Omega^k_j \wedge \Omega^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l ,\; R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^t_{j[k}\Gamma^i_{tl]} , \qquad (13)$$

где альтернирование выполняется по крайним индексам в квадратных скобках.

Утверждение 3. *Структурные уравнения для форм аффинной связности* Ω^i_j *имеют вид* (13_1)*. Они содержат компоненты объекта кривизны* R^i_{jkl}*, выражающиеся по формуле* (13_2)*.*

Рассмотрим объект кривизны $\{R^i_{jkl}\}$ с внешней точки зрения. Продифференцируем внешним образом уравнения (13_1) с учетом их самих, а также уравнений (1). Получим:

$$\Omega^l_j \wedge \Omega^k_l \wedge \Omega^i_k + R^k_{jlm}\omega^l \wedge \omega^m \wedge \Omega^i_k - \Omega^k_j \wedge \Omega^l_k \wedge \Omega^i_l -$$
$$- R^i_{klm}\omega^l \wedge \omega^m \wedge \Omega^k_j + dR^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l + R^i_{jkl}\omega^m \wedge \omega^k_m \wedge \omega^l -$$
$$- R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^m \wedge \omega^l_m = 0.$$

С учетом свойств внешнего умножения первое и третье слагаемые уничтожаются взаимно. Из оставшихся слагаемых вынесем общее внешнее произведение форм $\omega^k \wedge \omega^l$ за скобку:

$$(dR^i_{jkl} + R^m_{jkl}\Omega^i_m - R^i_{mkl}\Omega^m_j - R^i_{jml}\omega^m_k - R^i_{jkm}\omega^m_l) \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0.$$

Запишем последние уравнения в виде, удобном для разрешения их по лемме Лаптева:

$$\left((dR^i_{jkl} + R^m_{jkl}\Omega^i_m - R^i_{mkl}\Omega^m_j - R^i_{jml}\omega^m_k - R^i_{jkm}\omega^m_l) \wedge \omega^l\right) \wedge \omega^k = 0.$$

Используя эту лемму, получим:

$$\begin{gathered}\left(dR^i_{jkl} + R^m_{jkl}\Omega^i_m - R^i_{mkl}\Omega^m_j - R^i_{jml}\omega^m_k - R^i_{jkm}\omega^m_l\right) \wedge \omega^l = \\ = \omega^l \wedge \widetilde{\omega}^i_{jkl}, \;\; \widetilde{\omega}^i_{j[kl]} \cong 0.\end{gathered} \tag{14}$$

Перенесем правую часть влево и вынесем общие базисные формы за скобку:

$$\left(dR^i_{jkl} + R^m_{jkl}\Omega^i_m - R^i_{mkl}\Omega^m_j - R^i_{jml}\omega^m_k - R^i_{jkm}\omega^m_l + \widetilde{\omega}^i_{jkl}\right) \wedge \omega^l = 0.$$

Полученные уравнения разрешим по лемме Картана:

$$dR^i_{jkl} + R^m_{jkl}\Omega^i_m - R^i_{mkl}\Omega^m_j - R^i_{jml}\omega^m_k - R^i_{jkm}\omega^m_l + \widetilde{\omega}^i_{jkl} = \overline{R}^i_{jklm}\omega^m,$$

$$\overline{R}^i_{jk[lm]} = 0.$$

Подставляя выражения форм связности Ω^i_j (10), получим:

$$\begin{gathered}dR^i_{jkl} + R^m_{jkl}\omega^i_m - R^m_{jkl}\Gamma^i_{mt}\omega^t - R^i_{mkl}\omega^m_j + R^i_{mkl}\Gamma^m_{jt}\omega^t - \\ - R^i_{jml}\omega^m_k - R^i_{jkm}\omega^m_l + \widetilde{\omega}^i_{jkl} = \overline{R}^i_{jklm}\omega^m.\end{gathered}$$

Перенесем третье и пятое слагаемое вправо, соберем оставшиеся слагаемые под дифференциальный оператор ΔR^i_{jkl} и проальтернируем по индексам k и l:

$$\Delta R^i_{jkl} + \widetilde{\omega}^i_{j[kl]} = \left(\overline{R}^i_{jklm} + R^t_{jkl}\Gamma^i_{tm} - R^i_{tkl}\Gamma^t_{jm}\right)\omega^m .$$

Учитывая сравнения (14_2) по модулю базисных форм ω^i, получаем:

$$\Delta R^i_{jkl} = R^i_{jklm}\omega^m. \tag{15}$$

Утверждение 4. *Дифференциальные уравнения для компонент объекта кривизны аффинной связности имеют вид (15).*

Вывод. Получили новый подход к нахождению уравнений на компоненты объектов кривизны фундаментально-групповой и аффинной связностей. Этот способ оказывается короче по сравнению со способом (см., напр., [3]) непосредственного дифференцирования выражений (6_2) и (13_2).

Список литературы

1. *Лаптев Г.Ф.* Структурные уравнения главного расслоенного многообразия // Тр. геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1969. Т. 2 С. 161—178.

2. *Рязанов Н.А.* Скобка Ли касательных векторов и тождества Бьянки в главном расслоении // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2014. Вып. 45. С. 113—120.

3. *Рязанов Н.А.* Объект кривизны фундаментально-групповой связности 2-го порядка // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физ.-матем. и техн. науки. 2017. №4. С. 10—15.

4. *Шевченко Ю.И.* Связность в продолжении главного расслоения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1991. Вып. 22. С. 117—127.

N. Ryazanov[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
ryazanov-92@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6712-6693
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-15

About differential equations of the curvature tensors of a fundamental group and affine connections

Submitted on January 28, 2019

The principal bundle is considered, the base of which is an n-dimensional smooth manifold, and the typical fiber is an r-fold Lie group. Structure equations for the forms of the fundamental group and affine connections are given, each of which contains the corresponding components of the curvature tensor. For each connection, an approach is shown that allows to find the differential equations for the components of the curvature tensor of the corresponding connection in a faster way than by differentiating the expressions of these objects in terms of the connection objects and their Pfaffian derivatives. The method consists in successively solving cubic equations, first by Laptev's lemma, then by Cartan's lemma. Taking into account the comparisons modulo basic forms, we obtain already known results (see [3]). Thus, differential equations are derived for the components of the curvature tensor of the first-order fundamental-group connection, as well as for the components of the curvature tensor of the affine connection.

Keywords: structure equations of Laptev, fundamental-group connection, affine connection, connection object, curvature tensor.

References

1. *Laptev, G.F.:* The structural equations of a principal bundle manifold. Tr. Geom. Semin, VINITI, Moscow. 2, 161—178 (1969) (in Russian).

2. *Ryazanov, N.A.:* Lie bracket for tangent vectors and Bianchi identities in principal bundle. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 45, 113—120 (2014) (in Russian).

3. *Ryazanov, N.A.:* The object of curvature of a fundamental-group connection of the 2nd order. IKBFU's Vestnik. Ser. Physics, Mathematics, and Technology. Kaliningrad. 4, 10—15 (2017) (in Russian).

4. *Shevchenko, Yu. I.:* Connection in the prolongation of the main bundle. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 22, 117—127 (1991) (in Russian).