$$\nu\{\gamma(\Gamma_2^{11}\Gamma_2^{32}-\Gamma_2^{31}\Gamma_2^{12})+\varsigma[\Gamma_4^{31}(a\Gamma_2^{32}-\Gamma_2^{12})+$$
$$+\Gamma_4^{32}(\Gamma_2^{11}-a\Gamma_2^{31})]\}=0. \qquad (2.8)$$

Из (I.I5),(2.6);(I.I7),(2.7);(I.I9) и (2.8) непосредственно следует, что точки A_1, A_3, A_4 являются соответственно фокусами лучей A_1A_2, A_2A_3, A_2A_4 прямолинейных конгруэнций.
3/Из уравнений (I.I6),(I.I8) и (2.4) находим, что торсы указанных конгруэнций определяются формулами:

$$\omega_1\omega_1^2=0,$$

$$\omega_1(a\omega_2-\omega_2^1)=0,$$

откуда и вытекает утверждение теоремы. Теорема доказана.

Так как все коники конгруэнций (C_1) и (C_2) принадлежат одной квадрике Q, то любая точка коник C_1 и C_2 является фокальной [2].

Список литературы.

I. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-"Труды Моск.матем.о-ва", I953, т.2, с.273-383 (М., ГИТТЛ).

2. М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции кривых второго порядка с неопределенными фокальными семействами.-"Труды Томского ун-та, " I960, т.I60, с.5-I4.

Ф.А. Л и п а т о в а

ВЫРОЖДЕННАЯ КОНГРУЭНЦИЯ ПАР ФИГУР, ОБРАЗОВАННЫХ ЭЛЛИПСОМ И ТОЧКОЙ, ИНЦИДЕНТНОЙ ЭЛЛИПСУ

В трехмерном эквиаффинном пространстве исследуется класс вырожденных конгруэнций T пар фигур, образованных эллипсом C и точкой M, инцидентной эллипсу C, где точка M описывает линию.

Отнесем конгруэнцию T к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где A — центр эллипса, вектор $\bar{e}_1=\overline{AM}$, вектор $\bar{e}_2=\overline{AA_2}$ сопряжен вектору $\bar{e}_1$ относительно эллипса C, точка A_2 инцидентна этому эллипсу, вектор $\bar{e}_3$ коллинеарен касательной к линии, описываемой точкой M в точке M.

Из рассмотрения исключается случай, при котором касательная коллинеарна плоскости $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$.

Эллипс C относительно репера R определяется уравнениями

$$(x^1)^2+(x_2^2)^2=1, \qquad (1.1)$$
$$x^3=0.$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции T имеет вид :

$$\omega^3 = a\omega^1 + b\omega^2, \qquad \omega_1^1 = -\omega^1,$$

$$\omega_1^2 = -\omega^2, \qquad \omega_1^3 = n\omega^1 + m\omega^2,$$

$$\omega_2^1 = p\omega^1 + k\omega^2, \qquad \omega_2^2 = s\omega^1 + t\omega^2, \tag{1.2}$$

$$\omega_2^3 = q\omega^1 + r\omega^2, \qquad \omega_3^1 = m_1\omega^1 + m_2\omega^2,$$

$$\omega_3^2 = n_1\omega^1 + n_2\omega^2,$$

где ω^i, ω_i^j $(i,j,k=1,2,3)$ компоненты деривационных формул репера R ,удовлетворяющие уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad \mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \tag{1.3}$$

и условию эквиаффинности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0.$$

Анализируя систему (1.2), убеждаемся,что вырожденная конгруэнция T существует и определяется с произволом пяти функций двух аргументов.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнция T называется конгруэнцией T^1 ,если выполняются условия

$$a = b = m = k = q = r = m_1 = m_2 = n_1 = n_2 = 0. \tag{1.4}$$

Конгруэнция T^1 определяется системой пфаффовых уравнений

$$\omega^3 = 0, \quad \omega_1^1 = -\omega^1, \quad \omega_1^3 = n\omega^1, \quad \omega_1^2 = -\omega^2,$$

$$\omega_2^1 = p\omega^1, \quad \omega_2^2 = s\omega^1 + t\omega^2, \quad \omega_2^3 = 0, \tag{1.5}$$

$$\omega_3^1 = 0, \quad \omega_3^2 = 0, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0.$$

Анализируя систему (1.5), заключаем,что конгруэнция T^1 существует и определяется с произволом одной функции двух переменных.

Т е о р е м а. Точки пересечения диаметров AM и AA_2 с эллипсом C конгруэнции T^1 являются его фокальными точками,причем точка $M(1,0)$- сдвоенный фокус. Шестой фокус находится в точке

$$F\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, -\frac{2t}{1+t}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фокальные поверхности и фокальные семейства конгруэнции (C) определяются из системы уравнений

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \quad x^3 = 0,$$

$$\omega_1^1(x^1)^2 + \omega_2^2(x^2)^2 + (\omega_2^1 + \omega_1^2)x^1x^2 + x^1\omega^1 + x^2\omega^2 = 0, \tag{1.6}$$

$$x^1\omega_1^3 + x^2\omega_2^3 + \omega^3 = 0.$$

Из системы (1.6),учитывая уравнения (1.5),получаем уравнения для определения фокальных точек эллипса C конгруэнции:

$$(x^1)^2+(x^2)^2=1\,,\quad x^3=0\,,$$
$$x_1^1 x^2\,(t x^2-x^1+1)=0\,. \tag{1.7}$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнция T^1 называется конгруэнцией T_1^1, если выполняются условия

$$p=t=0\,, \tag{2.1}$$
$$s=1\,. \tag{2.2}$$

Конгруэнция T_1^1 определяется системой уравнений:

$$\begin{gathered}\omega^3=0\,,\quad \omega_1^1=-\omega^1,\quad \omega_1^2=-\omega^2,\\ \omega_1^3=n\omega^1,\quad \omega_2^1=0,\quad \omega_2^2=\omega^1,\\ \omega_2^3=0\,,\ \omega_3^1=0\,,\ \omega_3^2=0\,,\ \omega_3^3=0\end{gathered} \tag{2.3}$$

Анализируя систему уравнений (2.3), убеждаемся, что конгруэнция T_1^1 существует с произволом одной функции одного аргумента.

Т е о р е м а 1. Точки пересечения диаметров AM и AA_2 с эллипсом C конгруэнции T_1^1 являются его фокальными точками, причем точка $M(1,0)$ является строенным фокусом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из системы (1.6), учитывая уравнения (2.3), находим уравнения для определения координат фокальных точек эллипса C конгруэнции T_1^1:

$$\begin{gathered}(x^1)^2+(x^2)^2=1\,,\quad x^3=0\,,\\ x^1x^2\,(x^1-1)=0\,,\end{gathered} \tag{2.4}$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 2. Поверхность (A) конгруэнции T_1^1 является торсом; вдоль направлений $\omega^1=0$ коники конгруэнции (C) инцидентны одной плоскости.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение асимптотических линий поверхности (A) имеет вид:

$$n(\omega^1)^2=0\,.$$

Так как при $\omega^1=0$, $dx^3\equiv 0$, то теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Вдоль координатной линии $\omega^2=0$ плоскость $x^2=0$ стационарна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$(dx^2)_{\omega^2=0}=-x^2\omega^1.$$

Следовательно, вдоль линии $\omega^2=0$ плоскость $x^2=0$ стационарна.

Т е о р е м а 4. Линия, описываемая точкой M, является прямой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу системы (2.3) имеем, что $d\bar e_3=0$, т.е. $\bar e_3$ – постоянный вектор.

Т е о р е м а 5. Касательные плоскости к поверхностям (A) и (A_3) соответственно в точках A и A_3 параллельны. Точки A и M являются фокусами прямолинейной конгруэнции $\{A,\bar e_1\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Касательная плоскость к поверхности (A) в точке A определяется точкой A и векторами $\bar e_1$ и $\bar e_2$. Касательная плоскость к поверхности

(A_3) в точке A_3 определяется точкой A_3 и векторами $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Фокусами прямолинейной конгруэнции $\{A, \bar{e}_1\}$ являются точки

$$\bar{F}_1 = \bar{A}, \quad \bar{F}_2 = \bar{A} + \bar{e}_1 .$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
1975 вып.6

В.С.М а л а х о в с к и й

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПРИЗНАКАХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В работе, носящей методический характер, дано приложение метода внешних форм и подвижного репера к установлению характеристических признаков некоторых известных классов поверхностей.

§I. Цилиндрические поверхности R.

О п р е д е л е н и е I. Поверхностью R называется поверхность в трехмерном евклидовом пространстве E_3, все нормали которой пересекают прямую $\ell \in E_3$. Прямая ℓ называется осью поверхности R.

Поверхность R называется цилиндрической поверхностью R, если её касательная плоскость в каждой точке параллельна оси ℓ.

Т е о р е м а I.I. Цилиндрические поверхности R являются прямыми круговыми цилиндрами с осью ℓ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отнесем поверхность R к каноническому ортонормированному реперу $\{A, \bar{e}_i\}$, $(i, j, k = 1, 2, 3)$,