УДК 514.75

***М. В. Кретов*[1], *Е. М. Кретова*[2]**
[1, 2] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград*
[1] Kretov1@mail.ru, [2] e.kretova1@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-5

Комплексы гиперболических параболоидов без фокальных многообразий

В трехмерном аффинном пространстве продолжается исследование комплексов (трехпараметрических семейств) гиперболических параболоидов. Рассматривается подкласс ранее изученных комплексов $\widehat{\Gamma\Pi}_3$ гиперболических параболоидов без фокального многообразия. Доказано, что характеристическое многообразие исследуемого многообразия содержится на третьей координатной прямой. Установлено, что концы первых двух координатных векторов и точки первой координатной плоскости описывают трехпараметрические семейства поверхностей, не зависящие от параметра, а конец третьего координатного вектора и точки остальных координатных плоскостей описывают трехпараметрическое семейство поверхностей, зависящее от параметра. Найдены также другие геометрические свойства исследуемого многообразия.

Ключевые слова: аффинное пространство, гиперболический параболоид, комплекс, многообразие, репер, система уравнений Пфаффа, фокальное многообразие, характеристическое многообразие, трехпараметрическое семейство

В работе [1] исследованы комплексы $\widehat{\Gamma\Pi}_3$ гиперболических параболоидов в аффинном пространстве, когда индикатрисы векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ неподвижны, а координатный вектор $\bar{e}_3$ опи-

Поступила в редакцию 22.12.2025 г.
© Кретов М. В., Кретова Е. М., 2026

сывает линии с касательными, параллельными ему в репере $R = \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, который характеризуется следующим образом: A — вершина гиперболического параболоида [2], векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены и лежат в главной плоскости образующего элемента, вектор $\bar{e}_3$ направлен по оси параболоида, конец P вектора $\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ лежит на гиперболическом параболоиде. При этом уравнение гиперболического параболоида q согласно [2] имеет вид

$$(x^1)^2 - (x^2)^2 - x^3 = 0.$$

Примем формы ω^1, ω^2, ω^3 за независимые первичные параметры согласно [1; 3; 4]. Тогда система уравнений Пфаффа многообразия $\widehat{\Gamma\Pi}_3$ имеет вид

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_1^2 = \omega_2^1 = \omega_1^3 = \omega_3^1 = \omega_2^3 = \omega_3^2 = 0,$$
$$\omega_3^3 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2 + \gamma\omega^3,$$

где параметры α, β, γ введены в работе [1].

Определение 1. Комплекс $\widehat{\Gamma\Pi}_3$ гиперболических параболоидов без фокальных многообразий [5] назовем *комплексом* $\Gamma\Pi_0$ *гиперболических параболоидов.*

Теорема 1. *Многообразия* $\Gamma\Pi_0$ *существуют и определяются с произволом одной функции одного аргумента.*

Доказательство. Систему уравнений Пфаффа многообразия $\Gamma\Pi_0$ легко найти по аналогии с работами [6—8] в виде

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_1^2 = \omega_2^1 = \omega_1^3 = \omega_3^1 = \omega_2^3 = \omega_3^2 = 0,$$
$$\omega_3^3 = \gamma\omega^3. \qquad (1)$$

Чистое замыкание [9] системы (1) имеет вид

$$\alpha\gamma \wedge \omega^3 = 0. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 0, N = Q = 1.$$

Система (1; 2) в инволюции и определяет комплексы гиперболических параболоидов $\Gamma\Pi_0$ с произволом одной функции одного аргумента. Теорема доказана.

Обозначим через A_i концы векторов $\bar{e}_i$, M_i — текущие точки координатных прямых $(A, \bar{e}_i)$, а через M_{3+i} текущие точки соответствующих координатных плоскостей $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$, $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$ и $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Из системы уравнений (1) и деривационных формул репера R по аналогии с работами [6—8] находим

$$d\bar{e}_1 = 0,\ d\bar{e}_2 = 0,\ d\bar{e}_3 = \gamma\omega^3\bar{e}_3,$$

$$dA_1 = dA_2 = dM_1 = \omega^1\bar{e}_1 + \omega^2\bar{e}_2 + \omega^3\bar{e}_3, \qquad (3)$$

$$dA_3 = dM_2 = dM_3 = \omega^1\bar{e}_1 + \omega^2\bar{e}_2 + (1+\gamma)\omega^3\bar{e}_3.$$

Анализируя формулы (3), согласно [9] получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Комплексы* $\Gamma\Pi_0$ *гиперболических параболоидов обладают следующими геометрическими свойствами:*

1) координатные векторы $\bar{e}_1$ *и* $\bar{e}_2$ *постоянны;*

2) координатный вектор $\bar{e}_3$ *описывает линии с касательными, параллельными ему;*

3) концы векторов $\bar{e}_1$ *и* $\bar{e}_2$*, а также точки координатной плоскости* $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ *описывают трехпараметрическое семейство поверхностей, не зависящее от параметра* γ;

4) конец вектора $\bar{e}_3$*, а также точки координатных плоскостей* $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$ *и* $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ *описывают трехпараметрическое семейство поверхностей, зависящее от параметра* γ.

Для исследуемого комплекса гиперболических параболоидов согласно работам [5; 6] легко найти характеристическое многообразие образующего элемента.

Используя уравнения

$$x^1 = 0,\ x^2 = 0,\ 1 + \gamma x^3 = 0,$$

можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Характеристическое многообразие гиперболического параболоида, описывающего комплекс* $\Gamma\Pi_0$*, состоит из одной точки, лежащей на третьей координатной прямой.*

Список литературы

1. *Кретов М.В.* Комплексы гиперболических параболоидов // ДГМФ. 2018. Вып. 49. С. 107—111.

2. *Комиссарук А.М.* Аффинная геометрия. Минск, 1977.

3. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

4. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

5. *Малаховский В.С., Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в *n*-мерном проективном пространстве // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1974. Т. 6. С. 113—134.

6. *Малаховский В.С.* Краткий курс дифференциальной геометрии. Калининград, 2010.

7. *Кретов М.В.* Об одном комплексе однополостных гиперболоидов // ДГМФ. 2016. Вып. 47. С. 77—82.

8. *Кретов М.В.* Дифференцируемое отображение, порожденное комплексами эллиптических параболоидов // ДГМФ. 2020. Вып. 51. С. 76—80.

9. *Малаховский В.С.* Некоторые проблемы дифференциальной геометрии многообразий фигур // ДГМФ. 1974. Вып. 5. С. 64—84.

Для цитирования: *Кретов М.В., Кретова Е.М.* Комплексы гиперболических параболоидов без фокальных многообразий // ДГМФ. 2026. №57 (2). С. 46—51. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-5.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010: 53A15, 58A10

M. V. Kretov[1], *E. M. Kretova*[2]
[1, 2] *Immanuel Kant Baltic Federal Univetsity, Russia*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
[1] Kretov1@mail.ru, [2] e.kretova1@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-5

Complexes of hyperbolic paraboloids without focal varieties

Submitted on December 22, 2025

In the three-dimensional affine space, the study of complexes (three-parameter families) of hyperbolic paraboloids continues. A subclass of previously studied complexes of hyperbolic paraboloids without a focal manifold is considered. It is proved that the characteristic manifold of the studied manifold is contained in the third coordinate line. It is found that the ends of the first two coordinate vectors and the points of the first coordinate plane describe three-parameter families of surfaces that do not depend on the parameter, while the end of the third coordinate vector and the points of the remaining coordinate planes describe a three-parameter family of surfaces that depends on the parameterand other geometric properties of the manifold under study.

Keywords: affine space, hyperbolic paraboloid, complex, manifold, reference frame, Pfaff system of equations, focal manifold, characteristic manifold, three-parameter family

References

1. *Kretov, M. V.:* Complexes of Hyperbolic Paraboloids. DGMF, 49, 107—111 (2018).

2. *Komissaruk, A. M.:* Affine geometry. Minsk (1977).

3. *Laptev, G. F.:* Differential geometry of imbedded manifolds. Group theoretical method of differential geometric investigations. Tr. Mosk. Math. Obs., 2, 275—382 (1953).

4. *Malakhovsky, V.S.:* Introduction to the theory of external forms. Kaliningrad (1978).

5. *Malakhovsky, V.S., Makhorkin, V.V.:* Differential geometry of varieties of hyperquadrics in n-dimensional projective space. Tr. Geom. Sem. Moscow, 6, 113—134 (1974).

6. *Malakhovsky, V.S.:* A Short Course in Differential Geometry. Kaliningrad (2010).

7. *Kretov, M.V.:* On a Complex of Single-Cavity Hyperboloids. DGMF, 47, 77—82 (2016).

8. *Kretov, M.V.:* Differentiable mapping generated by complexes of elliptic paraboloids. DGMF, 51, 76—80 (2020).

9. *Malakhovsky, V.S.:* Some problems of differential geometry of manifolds of shapes. DGMF, 5, 64—84 (1974).

For citation: Kretov, M.V., Kretova, E.M.: Complexes of hyperbolic paraboloids without focal varieties. DGMF, **57**:2, 46—51 (2026). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-5.

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)