УДК 514.764.22

С. Е. Степанов, И. Г. Шандра

(*Владимирский государственный педагогический университет; Финансовая академия при Правительстве РФ, г. Москва*)

ГАРМОНИЧЕСКИ ПЛОСКИЕ РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Риманово многообразие, допускающее гармонический диффеоморфизм на евклидово пространство, назовем *гармонически плоским.* В статье [1] нами была проведена классификация гармонических диффеоморфизмов римановых многообразий, в соответствии с которой можно выделить семь классов гармонически плоских римановых многообразий. В настоящей статье будут рассмотрены три класса таких многообразий. Результаты первого параграфа были анонсированы нами в докладе [2].

§ 1. Гармонические диффеоморфизмы

1.1. Рассмотрим гладкое отображение $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ римановых многообразий. Обозначим через Γ^k_{ij} и $\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ для $i,j,k,\ldots=1,\ 2,\ \ldots,\ m$ и $\alpha,\beta,\gamma,\ldots=1,2,\ldots,n$ символы Кристоффеля связностей Леви-Чивита ∇ и $\overline{\nabla}$ римановых многообразий $(M,\ g)$ и $(\overline{M},\ \overline{g})$ соответственно в локальных координатах $\{x^1,\ \ldots,x^m\}$ в окрестности U точки $x\in M$ и $\{\overline{x}^1,\ \ldots,\overline{x}^n\}$ в окрестности $\overline{U}\supset f(U)$ точки $\overline{x}=f(x)\in\overline{M}$. Отображение f является *гармоническим* [3] тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет уравнению Эйлера — Лагранжа

$$g^{ij}\left(\partial_i\partial_j f^{\alpha}-\Gamma^k_{ij}\partial_k f^{\alpha}+\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}\partial_i f^{\beta}\partial_j f^{\gamma}\right)=0.$$

Здесь $x^{\alpha} = f^{\alpha}\left(x^1,...,x^n\right)$, g^{ij} — контравариантные компоненты метрического тензора g и $\partial_i = \partial / \partial x^i$.

Рассмотрим в качестве $\left(\overline{M},\ \overline{g}\right)$ евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ с декартовой системой координат $\left\{\overline{x}^1,\ ...\ ,\overline{x}^n\right\}$ и метрикой $\overline{g}$, порождаемой каноническим скалярным произведением $\left\langle \cdot,\cdot \right\rangle$, тогда $\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$. Для отображения $f : \left(M, g\right) \to \left(\mathbf{R}^n, \left\langle\ ,\ \right\rangle\right)$ уравнения Эйлера — Лагранжа принимают вид $\Delta f^{\alpha} = 0$, где Δ — оператор Лапласа — Бельтрами многообразия $\left(M, g\right)$. Это означает, что f^{α} — гармонические функции. Поскольку известно [4, с. 308], что компактное риманово многообразие не имеет гармонических функций, кроме констант, то не существует и гармонических отображений компактного риманова многообразия на евклидово пространство. В частности, для гармонически плоских римановых многообразий будет справедливой

Лемма. *Не существует гармонически плоских компактных римановых многообразий.*

1.2. Пусть $\dim M = \dim \overline{M} = m$ и $f : \left(M, g\right) \to \left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ — диффеоморфизм, тогда [5, с. 67] локально отображение f будет осуществляться по принципу равенства координат $\overline{x}^1 = x^1,\ ...\ ,\overline{x}^m = x^m$ соответствующих точек $\overline{x} = f\left(x\right)$. В системе локальных координат $\left\{x^1,\ ...\ ,x^m\right\}$, которую принято называть [6, с. 47] общей по отношению к данному отображению, уравнения Эйлера — Лагранжа перепишутся так: $g^{ij}\left(\overline{\Gamma}^k_{ij} - \Gamma^k_{ij}\right) = 0$. Последние равенства, как это доказано в [1], равносильны уравнениям $g^{kl}\left(2\overline{\nabla}_k g_{lj} - \overline{\nabla}_j g_{kl}\right) = 0$. Если воспользоваться формулами $\partial_j \ln\sqrt{\det g} = 2^{-1}\left(g^{kl}\partial_j\, g_{kl}\right)$ матричного исчисления [7, с. 213], то последним уравнениям, выражающим условие гармоничности диффеоморфизма

$f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$, можно придать следующий вид: $\overline{\nabla}_k\left(\sqrt{\det g}\ g^{kj}\right)=0$. В итоге будет справедливой

Теорема 1. *Для того чтобы диффеоморфизм* $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ *риманова многообразия* (M,g) *со связностью Леви-Чивита* ∇ *на риманово многообразие* (M,g) *со связностью Леви-Чивита* $\overline{\nabla}$ *был гармоническим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению* f *локальной системе координат* $\left\{x^1,\ \dots\ ,x^m\right\}$ *выполнялись дифференциальные уравнения* $\overline{\nabla}_k\left(\sqrt{\det g}\ g^{kj}\right)=0$.

Пусть теперь $(\overline{M},\ \overline{g})$ — евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ с декартовой системой координат и метрикой $\overline{g}$, порождаемой каноническим скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, тогда уравнения Эйлера — Лагранжа примут вид: $g^{ij}\Gamma_{ij}^k=0$. Известно [8, с. 179], что для каждой локальной координаты x^k, рассматриваемой как функция на *M*, выполняются равенства $\Delta x^k=g^{ij}\Gamma_{ij}^k$. В итоге общая по отношению к гармоническому отображению $f:(M,g)\to\left(\mathbf{R}^m,\langle\ ,\ \rangle\right)$ система локальных координат $\left\{x^1,\ \dots\ ,x^m\right\}$ будет *гармонической* (см. там же). С учетом теоремы 1 сформулируем

Следствие. *Для гармонически плоского риманова многообразия* (M,g) *общая по отношению к отображению* $f:(M,g)\to\left(\mathbf{R}^m,\langle\ ,\ \rangle\right)$ *система локальных координат* $\left\{x^1,\ \dots\ ,x^m\right\}$ *является гармонической, что равносильно условию* $\partial_k\left(\sqrt{\det g}\ g^{kj}\right)=0$.

§ 2. Три класса гармонически плоских многообразий

2.1. Для того чтобы риманово многообразие $(M,\ g)$ допускало гармонический диффеоморфизм $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$

класса $\Im_1 \oplus \Im_3$ на риманово многообразие $\left(\overline{M},\ \overline{g}\right)$ постоянной кривизны $\overline{K}$, необходимо (см. [1]), чтобы тензор g имел вид $g = e^{\frac{1}{m-1}\theta}\left[Hess\left(F\right) + \overline{K}\ F\ \overline{g}\right]$ для $\theta = \ln\sqrt{\dfrac{\det \overline{g}}{\det g}} + const$ и гладкой функции $F : M \to \mathbf{R}$. Поскольку в качестве $\left(\overline{M},\ \overline{g}\right)$ выбирается евклидово пространство $\mathbf{R}^n$, то справедлива

Теорема 2. *Если $\left(M,\ g\right)$ является гармонически плоским римановым многообразием класса $\Im_1 \oplus \Im_3$, то $g = e^{\frac{1}{m-1}\theta}\, Hess\, F$ для некоторой строго выпуклой функции $F : M \to \mathbf{R}$ и $\theta = -\ln\sqrt{\det g} + const$.*

2.2. Согласно [1], если диффеоморфизм f риманова многообразия $\left(M, g\right)$ на евклидовое пространство $\mathbf{R}^n$ является гармоническим класса $\Im_2 \oplus \Im_3$, то в общей по отображению f локальной системе координат $\left\{x^1,\ \ldots\ , x^m\right\}$ метрика $g_{ij} = e^{\frac{1}{m+2}\theta}\left(A_{ijkl}x^k x^l + B_{ijk}x^k + C_{ij}\right)$ для $\theta = \ln\sqrt{\dfrac{\det \overline{g}}{\det g}} + const$ и симметричных по первым двум индексам постоянных A_{ijkl}, B_{ijk}, C_{ij} таких, что $A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl} = 0$ и $B_{ijk} + B_{jki} + B_{kij} = 0$. Переформулируем этот результат.

Теорема 3. *Если $\left(M,\ g\right)$ является гармонически плоским римановым многообразием класса $\Im_2 \oplus \Im_3$, то $g_{ij} = e^{\frac{1}{m+2}\theta}\left(A_{ijkl}x^k x^l + B_{ijk}x^k + C_{ij}\right)$ для $\theta = -\ln\sqrt{\det g} + const$ и симметричных по первым двум индексам постоянных A_{ijkl}, B_{ijk}, C_{ij} таких, что $A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl} = 0$ и $B_{ijk} + B_{jki} + B_{kij} = 0$*

В довершение заметим, что выбор постоянных A_{ijkl}, B_{ijk} и C_{ij} здесь ограничен условием положительной определенности тензора g.

2.3. Третий рассматриваемый здесь класс $\Im_3$ состоит из гармонических отображений $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$, каждое из которых представимо в виде композиции проективного и конформного отображений (см. [1]). Известно, что проективно плоские римановы многообразия являются многообразиями постоянной кривизны [5, с. 82], а любое риманово многообразие постоянной кривизны, в свою очередь, является конформно плоским [5, с. 69]. Тогда, что очевидно, риманово многообразие, которое поточечно конформно многообразию постоянной кривизны, будет конформно плоским. В итоге будет справедливой

Теорема 4. *Гармонически плоское риманово многообразие* $(M,\ g)$ *класса* $\Im_3$ *является конформно плоским.*

Список литературы

1. *Степанов С. Е., Шандра И. Г.* Семь классов гармонических диффеоморфизмов // Математические заметки. 2003. Т. 74. Вып. 5. С. 752—761.

2. *Степанов С. Е., Шандра И. Г.* Гармонически плоские римановы многообразия // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: Тезисы докладов. Владимир., 2006. С. 206—207.

3. *Eells J., Lemaire L.* A report on harmonic maps // Bull. London Math. Soc. 1978. V. 10. P. 1—68.

4. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М., 1969.

5. *Нарасимхан Р.* Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М., 1971.

6. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. М., 1979.

7. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр V: Риманова геометрия. М., 1998.

8. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. М., 2000.

S. Stepanov, I. Shandra

HARMONIOUSLY FLAT RIEMANNIAN MANIFOLDS

A harmoniously flat manifold is a Riemannian manifold admitting a harmonic diffeomorphism onto Euclidian space. Using the representations theory of groups, we have defined in an intrinsic way seven classes of harmonic diffeomorphisms (see *Mathematical notes*, Vol. 74, No. 5, 2003, pp. 708—716). In this paper, we define seven classes of harmoniously flat Riemannian manifolds on the basis of this classification. We also partly describe the geometry of three classes of these manifolds. The paper is based on the talk given at an International conference on differential equations and dynamical systems (Suzdal, 10—15 July 2006 y.).

УДК 514.756.2

А. В. Столяров

(Чувашский государственный педагогический университет)

ОБОБЩЕННО СОПРЯЖЕННЫЕ АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ НЕВЫРОЖДЕННОЙ НОРМАЛИЗАЦИЕЙ КОНФОРМНОГО ПРОСТРАНСТВА

Показано, что: 1) невырожденная нормализация $A_0 \to X_{n+1}$ конформного пространства C_n индуцирует две аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ без кручения, обобщенно сопряженные относительно поля ее основного тензора; 2) связность $\overset{2}{\nabla}$ совпадает с аффинной связностью $\tilde{\nabla}$ без кручения, индуцируемой нормализацией $X_{n+1} \to A_0$ пространства C_n.