Связность F_{ij}^{k} является внутренней связностью 2-го рода, оснащенной регулярной гиперполосы $X(\Gamma_m)$. Таким образом, используя соответствующее предложение А.П.Нордена [3], §62, мы приходим к выводу, что связности Π_{ij}^{k} и F_{ij}^{k} сопряжены относительно главного фундаментального тензора b_{1ij}^{o}.

Литература:

[I]. Атанасян Л.С., К теории оснащенных поверхностей многомерного проективного пространства. "Ученые зап.МГПИ им.В.И.Ленина, 1957, 108, вып.2, с.3-44.

[2]. Попов Ю.И., К теории оснащенной гиперполосы в многомерном проективном пространстве. "Уч.зап.МГПИ им.В.И.Ленина, 1970, 374, том.I, с.102-117.

[3]. Норден А.П., Пространства аффинной связности. ГИТТЛ, 1950.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3 1973

ПОХИЛА М.М.

О ГЕОМЕТРИИ ПАРЫ МНОГООБРАЗИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В n-мерном проективном пространстве рассматриваются $(n-1)$-мерные пары многообразий (Φ_1), (Φ_2) квадратичных элементов Φ_1, Φ_2 [3] с несовпадающими гиперплоскостями τ_1, τ_2. Через A_o и A_n обозначаются полюса $(n-2)$-плоскости τ пересечения гиперплоскостей τ_1 и τ_2 относительно Φ_1 и Φ_2.

Пара многообразий (Φ_1), (Φ_2) называется парой $V_{n-1,n}$ если точки A_o и A_n не инцидентны $(n-2)$-плоскости τ.

Для пары $V_{n-1,n}$ построено инвариантное оснащение гиперповерхностей (A_o) и (A_n), найдены и охарактеризованы различные инвариантные точки, прямые $(n-1)$, $(n-2)$ и $(n-3)$-мерные плоскости. В случае пар $V^{o}_{n-1,n}$, у которых A_o и A_n являются характеристическими точками гиперплоскостей τ_1 и τ_2, найдены пучки соприкасающихся гиперповерхностей (A_o) и (A_n).

Рассматриваемые в работе индексы принимают следующие значения:

$$a, b, c = 0, 1, \dots, n-1, n; \qquad i, j, k = 1, 2, \dots, n-2, n-1;$$

$$\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, n-2, n-1; \qquad \lambda, \mu, \nu = 1, 2, \dots, n-1, n.$$

§ 1. Дифференциальные уравнения пары $V_{n-1,n}$.

Присоединим к паре $V_{n-1,n}$ подвижной репер $R=\{A_\alpha\}$, расположив вершины A_i в $(n-2)$-плоскости τ. Уравнения квадратичных элементов Φ_1 и Φ_2 принимают вид:

$$(x^0)^2+a_{ij}x^ix^j=0, \quad x^n=0, \tag{1.1}$$

$$(x^n)^2+A_{ij}x^ix^j=0, \quad x^0=0, \tag{1.2}$$

где

$$a_{ij}=a_{ji}, \quad A_{ij}=A_{ji}, \quad \det(a_{ij})\neq 0, \quad \det(A_{ij})\neq 0. \tag{1.3}$$

Так как совокупность гиперплоскостей τ_2 (τ_1) зависит от $(n-1)$-го параметра, то между формами ω^0_λ (ω^n_λ) существует одна и только одна линейная зависимость.

Т е о р е м а 1. Для того, чтобы характеристическая точка $K_2(K_1)$ гиперплоскости τ_2 (τ_1) была инцидентна $(n-2)$-плоскости τ необходимо и достаточно, чтобы формы ω^0_i (ω^n_i) были линейно зависимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точка

$$M=x^\lambda A_\lambda \tag{1.4}$$

тогда и только тогда является характеристической точкой гиперплоскости τ_2, когда на паре $V_{n-1,n}$ выполняется уравнение

$$x^\lambda\omega^0_\lambda=0, \tag{1.5}$$

левая часть которого не обращается в нуль тождественно. При $x^n=0$ и только при этом условии возникает линейная зависимость между формами ω^0_i.

Аналогично доказывается утверждение теоремы для характеристической точки гиперплоскости τ_1.

С л е д с т в и е. Выберем, как и в [4], формы $\omega^0_i=\omega_i$ за базисные. Из рассмотрения исключены пары $V_{n-1,n}$, для которых характеристическая точка K_2 гиперплоскости τ_2 инцидентна $(n-2)$-плоскости τ пересечения гиперплоскостей τ_1 и τ_2.

Система дифференциальных уравнений пары $V_{n-1,n}$ запишется в виде:

$$\omega^0_n=a^j_n\omega_j, \quad \omega^\lambda_0=\Gamma^{\lambda j}_0\omega_j, \quad \omega^i_n=\Gamma^{ij}_n\omega_j, \quad \omega^n_i=\Gamma^{nj}_i\omega_j,$$

$$\nabla a_{ij}+2a_{ij}\omega^0_0=b^k_{ij}\omega_k, \quad \nabla A_{ij}+2A_{ij}\omega^n_n=B^k_{ij}\omega_k, \tag{1.6}$$

где

$$b^k_{ij}=b^k_{ji}, \quad B^k_{ij}=B^k_{ji} \tag{1.7}$$

Система величин

$$\Gamma=\{a_{ij}, A_{ij}, a^i_n, \Gamma^{\lambda i}_0, \Gamma^{nj}_i, \Gamma^{ij}_n, b^k_{ij}, B^k_{ij}\} \tag{1.8}$$

образует основной фундаментальный объект [2] пары $V_{n-1,n}$ (см. [4]).

Продолжая (1.6), получим систему дифференциальных уравнений локального фундаментального объекта Γ:

$$\delta a_{ij}=a_{kj}\pi^k_i+a_{ik}\pi^k_j-2a_{ij}\pi^0_0, \tag{1.9}$$

$$\delta A_{ij}=A_{kj}\pi^k_i+A_{ik}\pi^k_j-2A_{ij}\pi^n_n, \tag{1.10}$$

$$\delta a^i_n=-a^j_n\pi^i_j+a^i_n\pi^n_n, \tag{1.11}$$

$$\delta\Gamma^{ni}_0=-\Gamma^{nj}_0\pi^i_j+\Gamma^{ni}_0(2\pi^0_0-\pi^n_n), \tag{1.12}$$

$$\delta\Gamma^{ij}_0=-\Gamma^{kj}_0\pi^i_k-\Gamma^{ik}_0\pi^j_k+2\Gamma^{ij}_0\pi^0_0, \tag{1.13}$$

$$\delta\Gamma^{ij}_{n} = -\Gamma^{kj}_{n}\pi^{i}_{k} - \Gamma^{ik}_{n}\pi^{j}_{k} + \Gamma^{ij}_{n}(\pi^{0}_{0} + \pi^{n}_{n}), \tag{1.14}$$

$$\delta\Gamma^{nj}_{i} = \Gamma^{nj}_{k}\pi^{k}_{i} - \Gamma^{nk}_{i}\pi^{j}_{k} + \Gamma^{nj}_{i}(\pi^{0}_{0} - \pi^{n}_{n}), \tag{1.15}$$

$$\delta b^{k}_{ij} = b^{k}_{\ell j}\pi^{\ell}_{i} + b^{k}_{i\ell} - b^{\ell}_{ij}\pi^{k}_{\ell} - b^{k}_{ij}\pi^{0}_{0}, \tag{1.16}$$

$$\delta B^{k}_{ij} = B^{k}_{\ell j}\pi^{\ell}_{i} + B^{k}_{i\ell}\pi^{\ell}_{j} - B^{\ell}_{ij}\pi^{k}_{\ell} - B^{k}_{ij}(2\pi^{n}_{n} - \pi^{0}_{0}) \tag{1.17}$$

Из уравнений (I.9)-(I.I7) следует, что каждая из систем величин

$$\{a_{ij}\},\ \{A_{ij}\},\ \{a^{i}_{n}\},\ \{\Gamma^{ni}_{0}\}, \tag{1.18}$$

$$\{\Gamma^{ij}_{0}\},\ \{\Gamma^{ij}_{n}\},\ \{\Gamma^{nj}_{i}\},\ \{b^{k}_{ij}\},\ \{B^{k}_{ij}\}$$

образует тензор. Обозначим:

$$\Gamma_0 = \Gamma^{ni}_{i},\quad \Gamma_1 = \det(\Gamma^{ij}_{0}),$$

$$\Gamma_2 = \det(\Gamma^{ij}_{n}),\quad \Gamma_3 = \det(\Gamma^{nj}_{i}). \tag{1.19}$$

Используя (I.I3)-(I.I5), находим

$$\delta\Gamma_0 = \Gamma_0(\pi^{0}_{0} - \pi^{n}_{n}),\quad \delta\Gamma_1 = 2\Gamma_1[(n-1)\pi^{0}_{0} - \pi^{i}_{i}], \tag{1.20}$$

$$\delta\Gamma_2 = \Gamma_2[(n-1)(\pi^{0}_{0} + \pi^{n}_{n}) - 2\pi^{i}_{i}],\quad \delta\Gamma_3 = \Gamma_3(\pi^{0}_{0} - \pi^{n}_{n})(n-1)$$

Следовательно величины $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ являются относительными инвариантами пары $V_{n-1,n}$. Исключая из рассмотрения пары $V_{n-1,n}$, у которых характеристическая точка K_1 гиперплоскости τ_1 инцидентна $(n-2)$-плоскости τ, имеем

$$\Gamma_3 \neq 0.$$

условие $\Gamma_0 = 0$ означает, что проективное преобразование $\bar{x}^{j} = \rho\Gamma^{nj}_{i}x^{i}$ $(n-2)$-плоскости τ является преобразованием W [1].

В следующем параграфе рассмотрены пары $V_{n-1,n}$ у которых $A_0 \neq K_1$ и $A_n \neq K_2$.

§ 2. Геометрические образы, ассоциированные с парой $V_{n-1,n}$.

Точки A_0 и A_n, ассоциированные с парой $V_{n-1,n}$, описывают в общем случае гиперповерхности (A_0) и (A_n). Таким образом, каждая из систем форм $\{\omega^{\lambda}_{0}\}$ и $\{\omega^{\alpha}_{n}\}$ содержит $(n-1)$ линейно независимых форм.

Рассмотрим $(n-2)$-мерные плоскости η_1 и η_2, определяемые линейно независимыми системами точек

$$C^{i} = \Gamma^{ji}_{0}A_j + \Gamma^{ni}_{0}A_n,\quad \mathcal{D}^{i} = a^{i}_{n}A_0 + \Gamma^{ji}_{n}A_j. \tag{2.1}$$

Так как

$$\delta C^{i} = C^{k}(-\pi^{i}_{k} + 2\delta^{i}_{k}\pi^{0}_{0}),\quad \delta\mathcal{D}^{i} = \mathcal{D}^{k}[-\pi^{i}_{k} + \delta^{i}_{k}(\pi^{0}_{0} + \pi^{n}_{n})], \tag{2.2}$$

то $(n-2)$-плоскости η_1 и η_2 инвариантно присоединены к паре $V_{n-1,n}$.

Т е о р е м а 2. $(n-2)$-плоскость η_1 (η_2) является плоскостью пересечения гиперплоскости τ_2 (τ_1) с касательной гиперплоскостью ξ_1 (ξ_2) гиперповерхности $(A_0)((A_n))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя деривационные формулы репера R находим

$$dA_0 = \omega^{0}_{0}A_0 + \omega_i C^{i},\quad dA_n = \omega_i\mathcal{D}^{i} + \omega^{n}_{n}A_n \tag{2.3}$$

Из формул (2.3) непосредственно вытекает утверждение теоремы.

С л е д с т в и е. $(n-2)$-плоскость η_1 (η_2) является нормалью второго рода гиперповерхности $(A_0)((A_n))$.

Т е о р е м а 3. Равенство нулю относительного инварианта $\Gamma_1(\Gamma_2)$ характеризует инцидентность точки $A_n(A_0)$ касательной гиперплоскости

$\mathcal{E}_1\,(\mathcal{E}_2)$ к гиперповерхности $(A_0)\,((A_n))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как касательная гиперплоскость $\mathcal{E}_1$ к гиперповерхности (A_0) определяется точками A_0, $C^1,\dots, C^{n-1}$, то для инцидентности точки A_n гиперплоскости $\mathcal{E}_1$ должно выполняться условие

$$(A_0, C^1, \dots, C^{n-1}, A_n) = 0. \tag{2.4}$$

Учитывая в (2.4) формулы (2.1), получим $\Gamma_1 = 0$.

Аналогично доказывается другая часть теоремы. Исключая из рассмотрения случай инцидентности точки $A_n\,(A_0)$ гиперплоскости $\mathcal{E}_1\,(\mathcal{E}_2)$, мы будем считать в дальнейшем, что

$$\Gamma_1 \neq 0\,, \quad \Gamma_2 \neq 0\,. \tag{2.5}$$

Элементы матриц $(a^{ij}), (A^{ij}), (\Gamma^0_{ij}), (\Gamma^n_{ij}), (\Gamma^i_{nj})$, обратных матрицам $(a_{ij}), (A_{ij}), (\Gamma^{ij}_0), (\Gamma^{ij}_n), (\Gamma^{nj}_i)$, удовлетворяют следующим системам дифференциальных уравнений:

$$\delta a^{ij} = -a^{\ell j}\pi^i_\ell - a^{i\ell}\pi^j_\ell + 2a^{ij}\pi^0_0\,, \tag{2.6}$$

$$\delta A^{ij} = -A^{\ell j}\pi^i_\ell - A^{i\ell}\pi^j_\ell + 2A^{ij}\pi^n_n\,, \tag{2.7}$$

$$\delta\Gamma^0_{ij} = \Gamma^0_{\ell j}\pi^\ell_i + \Gamma^0_{i\ell}\pi^\ell_j - 2\Gamma^0_{ij}\pi^0_0\,, \tag{2.8}$$

$$\delta\Gamma^n_{ij} = \Gamma^n_{\ell j}\pi^\ell_i + \Gamma^n_{i\ell}\pi^\ell_j - \Gamma^n_{ij}(\pi^0_0 + \pi^n_n)\,, \tag{2.9}$$

$$\delta\Gamma^i_{nj} = \Gamma^i_{n\ell}\pi^\ell_j - \Gamma^\ell_{nj}\pi^i_\ell - (\pi^0_0 - \pi^n_n)\Gamma^i_{nj} \tag{2.10}$$

Из (2.6)-(2.10) непосредственно следует, что каждая система величин $\{a^{ij}\}, \{A^{ij}\}, \{\Gamma^0_{ij}\}, \{\Gamma^n_{ij}\}, \{\Gamma^i_{nj}\}$ образует тензор.

Т е о р е м а 4. Пара $V_{n-1,n}$ тогда и только тогда является

парой $V^0_{n-1,n}$, когда тензоры $\{a^i_n\}$ и $\{\Gamma^{ni}_0\}$ – нулевые.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характеристические точки K_1 и K_2 гиперплоскостей τ_1 и τ_2 определяются формулами

$$K_1 = A_0 - \Gamma^{nk}_0\Gamma^i_{nk}A_i\,, \quad K_2 = -a^i_n A_i + A_n \tag{2.11}$$

Так как

$$\det(\Gamma^i_{nk}) \neq 0\,, \tag{2.12}$$

то характеристическим признаком совпадения точек K_1 и K_2 с A_0 и A_n является обращение в нуль тензоров Γ^{ni}_0 и a^i_n.

Обозначим

$$c^{ij} = \Gamma^{ij}_0 + a^i_n\Gamma^{nj}_0\,, \quad d^{ij} = \Gamma^{ij}_n + \Gamma^{n\ell}_0\Gamma^i_{n\ell}a^j_n\,,$$

$$C = \det(c^{ij})\,, \quad \mathfrak{D} = \det(d^{ij}). \tag{2.13}$$

Используя (I.II)-(I.I4) и (2.I0) находим:

$$\delta c^{ij} = -c^{kj}\pi^i_k - c^{ik}\pi^j_k + 2c^{ij}\pi^0_0\,,$$

$$\delta d^{ij} = -d^{kj}\pi^i_k - d^{ik}\pi^j_k + d^{ij}(\pi^0_0 + \pi^n_n)\,, \tag{2.14}$$

$$\delta C = 2C[(n-1)\pi^0_0 - \pi^i_i]\,, \quad \delta\mathfrak{D} = \mathfrak{D}[(n-1)(\pi^0_0 + \pi^n_n) - 2\pi^i_i].$$

Т е о р е м а 5. Для того, чтобы характеристическая точка $K_2\,(K_1)$ гиперплоскости $\tau_2\,(\tau_1)$ была инцидентна гиперплоскости $\mathcal{E}_1\,(\mathcal{E}_2)$ касательной к гиперповерхности $(A_0)\,((A_n))$ необходимо и достаточно обращение в нуль относительного инварианта $C\,(\mathfrak{D})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как касательная гиперплоскость $\mathcal{E}_1$ к гиперповерхности (A_0) определяется точками $A_0, C^1, \dots, C^{n-1}$, то для инцидентности точки K_2 гиперплоскости $\mathcal{E}_1$ должно выполнться условие

$$(A_0, C^1, \dots, C^{n-1}, K_2) = 0 \qquad (2.15)$$

Учитывая в (2.15) формулы (2.I) и (2.II), получим $C = 0$.

Аналогично доказывается другая часть теоремы.

Пусть

$$\mathcal{M}_1 = \Gamma_0^{nk} a_n^{\ell} \Gamma_{nk}^{i} \Gamma_{i\ell}^{n} A_0 + \Gamma_0^{nk} \Gamma_{nk}^{i} A_i .$$

$$(2.16)$$

$$\mathcal{M}_2 = a_n^i A_i + a_n^{\ell} \Gamma_0^{nk} \Gamma_{\ell k}^{0} A_n .$$

Т е о р е м а 6. Прямая A_0K_1 (A_nK_2) пересекает гиперплоскость $\xi_2(\xi_1)$, касательную к гиперповерхности $(A_n)((A_0))$, в точке $\mathcal{M}_1(\mathcal{M}_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (2.I) и (2.II) находим:

$$\mathcal{M}_1 = \Gamma_0^{nk} \Gamma_{nk}^{\ell} \Gamma_{\ell i}^{n} \mathcal{D}^i , \quad M_1 = (\Gamma_0^{nk} a_n^{\ell} \Gamma_{nk}^{i} \Gamma_{i\ell}^{n} + 1) A_0 - K_1 ,$$

$$(2.17)$$

$$\mathcal{M}_2 = a_n^j \Gamma_{ji}^{0} C^i , \quad M_2 = (a_n^i \Gamma_0^{nj} \Gamma_{ij}^{0} + 1) A_n - K_2 .$$

Из (2.17) непосредственно следует

$$M_1 \equiv A_0 K_1 \cap \xi_2 , \quad M_2 \equiv A_n K_2 \cap \xi_1 . \qquad (2.18)$$

Обозначим

$$\rho_1 = \Gamma_0^{nk} a_n^{\ell} \Gamma_{nk}^{i} \Gamma_{i\ell}^{n} , \quad \rho_2 = a_n^i \Gamma_0^{nj} \Gamma_{ij}^{0} . \qquad (2.19)$$

Так как $\delta\rho_1 = 0$, $\delta\rho_2 = 0$, то ρ_1 и ρ_2 -абсолютные инварианты. Равенство $\rho_1 = -1$ $(\rho_2 = -1)$ характеризует совпадение точки с точкой K_1 (точки M_2 с точкой K_2); равенство $\rho_1 = 0$ $(\rho_2 = 0)$ означает совпадение точки M_1 с точкой $P_1 \equiv A_0 K_1 \cap \tau$ (точки M_2 с точкой $P_2 \equiv A_n K_2 \cap \tau$); равенство $\rho_1 = 1$ $(\rho_2 = 1)$

означает, что точка $M_1(M_2)$ совпадает с точкой $\mathcal{L}_1(\mathcal{L}_2)$ гармонически сопряженной с $K_1(K_2)$ относительно точек A_0 и P_1 $(A_n$ и $P_2)$.

Пусть

$$\tau_1 = a_{ij} a_n^i \Gamma_0^{nk} \Gamma_{nk}^{j} , \quad \tau_2 = A_{ij} a_n^i \Gamma_0^{nk} \Gamma_{nk}^{j} \qquad (2.20)$$

а $\tilde{\Phi}_1$, $\tilde{\Phi}_2$ — $(n-3)$-мерные квадрики, определяемые соответственно уравнениями

$$a_{ij} x^i x^j = 0 , \quad x^0 = 0 , \quad x^n = 0 ,$$

$$(2.21)$$

$$A_{ij} x^i x^j = 0 , \quad x^0 = 0 , \quad x^n = 0 .$$

Используя (I.9)-(I.I2) и (2.I0), находим

$$\delta\tau_1 = (\pi_n^n - \pi_0^0)\tau_1 , \quad \delta\tau_2 = (\pi_0^0 - \pi_n^n)\tau_2 . \qquad (2.22)$$

Равенство нулю относительного инварианта τ_1 (τ_2) означает, что точки P_1 и P_2 гармонически сопряжены относительно $\tilde{\Phi}_1(\tilde{\Phi}_2)$.

Каждая из точек $A_n, K_2, P_2, \mathcal{L}_2$ (если они отличны от M_2) определяют оснащение гиперповерхности (A_0). Аналогично, каждая точка $A_0, K_1, P_1, \mathcal{L}_1$ (если они отличны от M_1) определяют оснащение гиперповерхности (A_n).

Рассмотрим линейные подпространства

$$x^0 - a_{ij} \Gamma_0^{nk} \Gamma_{nk}^{i} x^j = 0 , \quad x^n = 0 ; \qquad (2.23)$$

$$A_{ij} \Gamma_0^{nk} \Gamma_{nk}^{i} x^j = 0 , \quad x^0 = 0 ; \qquad (2.24)$$

$$A_{ij} a_n^i x^j - x^n = 0 , \quad x^0 = 0 ; \qquad (2.25)$$

$$a_{ij}\Gamma_0^{nk}\Gamma_{nk}^i x^j = 0, \quad x^0 = 0, \quad x^n = 0; \tag{2.26}$$

$$a_{ij} a_n^i x^j = 0, \quad x^0 = 0, \quad x^n = 0; \tag{2.27}$$

$$A_{ij} a_n^i x^j = 0, \quad x^0 = 0, \quad x^n = 0; \tag{2.28}$$

Используя условия

$$dx^a = -x^\theta \omega_\theta^a + \theta x^a \tag{2.29}$$

стационарности точки в P_n и уравнения (I.9)–(I.12),(2.IO) убеждаемся, что каждое из этих линейных подпространств инвариантно. (n-2)-плоскости (2.23),(2.24),(2.25) являются полярами соответственно точки K_1 относительно Φ_1, точки P_1 относительно Φ_2, точки K_2 относительно Φ_2. (n-3)-плоскости (2.26),(2.27),(2.28) являются полярами соответственно точки P_1 относительно Φ_1, точки P_2 относительно Φ_1, точки P_2 относительно Φ_2.

§ 3. Характеристика некоторых тензоров пары $V_{n-1,n}$ с помощью преобразования W.

Пусть $m_j^k = a_{ij}\Gamma_0^{ik}$. Так как матрицы (a_{ij}) и (Γ_0^{ik}) невырождены, то матрица (m_j^k) – невырождена и, следовательно, тензор m_j^k определяет проективное преобразование

$$\overset{*}{x}{}^k = \rho m_j^k x^j \tag{3.1}$$

(n-2)-плоскости τ. Это преобразование является проективным преобразованием W [I], если абсолютный инвариант $m = m_i^i$ обращается в нуль, то есть если тензоры a_{ij} и Γ_0^{ij} аполярны.

Аналогично тензоры

$$\tilde m_j^k = a_{ij}\Gamma_n^{ik}, \quad \mu_j^k = A_{ij}\Gamma_0^{ik}, \quad \tilde\mu_j^k = A_{ij}\Gamma_n^{ik} \tag{3.2}$$

определяют проективные преобразования (n-2)-плоскости τ:

$$\overset{*}{x}{}^k = \rho \tilde m_j^k x^j, \quad \overset{*}{x}{}^k = \rho \mu_j^k x^j, \quad \overset{*}{x}{}^k = \rho \tilde\mu_j^k x^j, \tag{3.3}$$

являющиеся преобразованиями W в том случае, если относительные инварианты

$$\tilde m = \tilde m_i^i; \quad \mu = \mu_i^i, \quad \tilde\mu = \tilde\mu_i^i \tag{3.4}$$

нулевые, то есть тензоры a_{ij} и Γ_n^{ij}, A_{ij} и Γ_0^{ij}, A_{ij} и Γ_n^{ij} аполярны.

Пусть X – точка (n-2)-плоскости τ, t – поляра точки X относительно квадрики Φ_1. $\overset{*}{X}$ – полюс (n-3)-плоскости t относительно квадрики Φ_2. Проективное преобразование

$$\overset{*}{x}{}^k = \rho a_{ij} A^{ik} x^j \tag{3.5}$$

отображающее точку X в точку $\overset{*}{X}$, является преобразованием W тогда и только тогда, когда тензоры a_{ij} и A^{ij} аполярны. Аналогично, аполярность тензоров a^{ij} и A_{ij} означает, что преобразование, обратное к (3.5), является преобразованием W. Можно строить инвариантные (n-3)-мерные квадрики (гиперквадрики (n-2)-плоскости τ) с помощью рассмотрения проективных преобразований инвариантных прямых (например, прямой A_0A_n) пары $V_{n-1,n}$ требуя чтобы эти преобразования были преобразованиями W (инволютивными).

Точке $P = x^i A_i$ (n-2)-плоскости τ ставим в соответствие её поляру относительно Φ_1 (или Φ_2), определяемую тензором $a_i = a_{ij}x^j$. Рассмотрим теперь смещение пары фигур (Φ_1, Φ_2) вдоль линии

$$\omega_i = a_i \theta \tag{3.6}$$

где θ – параметрическая форма, $\mathcal{D}\theta = \theta \wedge \theta_1$. Пусть

$$Y = y^0 A_0 + y^n A_n \qquad (3.7)$$

любая точка прямой A_0A_n. При смещении вдоль линии (3.6) точка Y описывает кривую, касательная к которой пересекает $(n-2)$-плоскость в точке

$$Z = (y^0\Gamma^{ij}_0 + y^n\Gamma^{ij}_n) a_j A_i . \qquad (3.8)$$

Касательная к линии, описанной точкой Z пересекает прямую A_0A_n в точке

$$\overset{*}{Y} = (y^0\Gamma^{ij}_0 + y^n\Gamma^{ij}_n) a_i a_j A_0 + (y^0\Gamma^{kj}_0 + y^n\Gamma^{kj}_n)\Gamma^{ni}_k a_i a_j A_n . \qquad (3.9)$$

Таким образом точке $P = x^iA_i$ $(n-2)$-плоскости τ ставится в соответствие проективное преобразование прямой A_0A_n, преобразующее точку Y в точку $\overset{*}{Y}$. Это преобразование является преобразованием W (инволюцией), если $(n-3)$-плоскость

$$a_i x^i = 0, \quad x^0 = 0, \quad x^n = 0 \qquad (3.10)$$

инцидентна квадратичному многообразию

$$(\Gamma^{ij}_0 + \Gamma^{ni}_k\Gamma^{kj}_n) a_i a_j = 0 . \qquad (3.11)$$

Точка $P = x^iA_i$ при этом должна быть инцидентна инвариантно присоединенной к паре $V_{n-1,n}$ $(n-3)$-мерной квадрике

$$(\Gamma^{ij}_0 + \Gamma^{ni}_k\Gamma^{kj}_n) a_{il} a_{jm} x^l x^m = 0 , \quad x^0 = 0, \quad x^n = 0 \qquad (3.12)$$

Аналогично строятся поля других инвариантно присоединенных к паре $V_{n-1,n}$ $(n-3)$-мерных квадрик. Величины

$$\Gamma^0_0 = \Gamma^{ij}_0\Gamma^0_{ij}, \quad \Gamma^n_0 = \Gamma^{ij}_0\Gamma^n_{ij}, \quad \Gamma^0_n = \Gamma^0_{ij}\Gamma^{ij}_n, \quad \Gamma^n_n = \Gamma^{ij}_n\Gamma^n_{ij} \qquad (3.13)$$

являются относительными инвариантами пары $V_{n-1,n}$, равенство нулю которых означает, что соответствующие проективные преобразования $(n-2)$-плоскости τ являются преобразованиями W.

§ 4. Пары $V^0_{n-1,n}$.

О п р е д е л е н и е. Парой $V^0_{n-1,n}$ многообразий квадратичных элементов будем называть такую пару $V_{n-1,n}$, для которой точки A_0 и A_n являются характеристическими точками гиперплоскостей τ_1 и τ_2 (совпадают с точками K_1 и K_2).

Так как точки A_0, A_n пары $V^0_{n-1,n}$ являются характеристическими точками гиперплоскостей τ_1, τ_2, то

$$\omega^0_n = 0 , \quad \omega^n_0 = 0 . \qquad (4.1)$$

Замыкая уравнения (4.1), находим

$$\Gamma^{ij}_n = \Gamma^{ji}_n , \quad \Gamma^{il}_0\Gamma^{nk}_i = \Gamma^{ik}_0\Gamma^{nl}_i . \qquad (4.2)$$

Рассмотрим поле гиперквадрик

$$\mu_{ab} x^a x^b = 0 , \quad \mu_{ab} = \mu_{ba} . \qquad (4.3)$$

Условия инвариантности поля Σ записываются в виде:

$$d\mu_{ab} = \mu_{cb}\omega^c_a + \mu_{ac}\omega^c_b + \theta\mu_{ab} + \mu^i_{ab}\omega_i . \qquad (4.4)$$

При фиксированных первичных параметрах уравнения (4.4) принимают вид:

$$\delta\mu_{00} = \mu_{00}(2\pi^0_0 + \theta) , \qquad (4.5)$$

$$\delta\mu_{0i} = \mu_{0i}(\pi^0_0 + \theta) + \mu_{0j}\pi^j_i , \qquad (4.6)$$

$$\delta\mu_{0n} = \mu_{0n}(\pi^0_0 + \pi^n_n + \theta) , \qquad (4.7)$$

$$\delta\mu_{ij} = \mu_{kj}\pi^k_i + \mu_{ik}\pi^k_j + \mu_{ij}\theta , \qquad (4.8)$$

$$\delta\mu_{in} = \mu_{kn}\pi^k_i + \mu_{in}(\pi^n_n + \theta) , \qquad (4.9)$$

$$\delta\mu_{nn} = \mu_{nn}(2\pi^n_n + \theta) . \qquad (4.10)$$

Соотношения $\mu_{oo}=0$, $\mu_{oi}=0$ характеризуют касание гиперквадрики (4.3) с гиперповерхностью (A_o). Не умаляя общности, можно считать $\mu_{on}=-1$. Уравнения (4.8),(4.9),(4.10) приводятся к виду:

$$\delta\mu_{ij}=\mu_{kj}\pi_i^k+\mu_{ik}\pi_j^k-\mu_{ij}(\pi_o^o+\pi_n^n), \tag{4.11}$$

$$\delta\mu_{in}=\mu_{kn}\pi_i^k-\mu_{in}\pi_o^o, \tag{4.12}$$

$$\delta\mu_{nn}=\mu_{nn}(\pi_n^n-\pi_o^o). \tag{4.13}$$

Требуя чтобы гиперквадрика (4.3) имела касание второго порядка с гиперповерхностью (A_o) (была соприкасающейся), получим:

$$\mu_{ij}=\Gamma_i^{nk}\Gamma_{jk}^o. \tag{4.14}$$

Обозначим

$$\begin{gathered} b_i=b_{ij}^{\,j}, \quad b^i=\Gamma_n^{ij}b_j, \quad B_i=B_{ij}^{\,j}, \\ \hat{B}^i=A^{ij}B_j, \quad \widetilde{B}_i=a_{ij}\hat{B}^j, \quad \widetilde{B}^i=\Gamma_n^{ij}\widetilde{B}_j, \end{gathered} \tag{4.15}$$

и

$$\begin{gathered} \hat{b}_1=b_ib^i, \quad \hat{b}_2=B_i\hat{B}^i, \quad \hat{b}_3=\tau_1, \\ \hat{b}_4=\widetilde{m}, \quad \hat{b}_5=\Gamma_n^o. \end{gathered} \tag{4.16}$$

Пусть $\sigma,\widetilde{\sigma},\sigma_\varepsilon,\widetilde{\sigma}_\varepsilon$ (ε=1,2,3,4,5)-произвольные абсолютные инварианты пары $V_{n-1,n}^o$. Уравнения

$$-2x^ox^n+\Gamma_i^{nk}\Gamma_{jk}^o x^ix^j+2b_ix^ix^n+\hat{b}_\varepsilon\sigma_\varepsilon(x^n)^2=0, \tag{4.17}$$

$$-2x^ox^n+\Gamma_i^{nk}\Gamma_{jk}^o x^ix^j+2\widetilde{B}_ix^ix^n+\hat{b}_\varepsilon\widetilde{\sigma}_\varepsilon(x^n)^2=0, \tag{4.18}$$

$$2x^ox^n-\Gamma_i^{nk}\Gamma_{jk}^o x^ix^j-2\sigma b_ix^ix^n=0, \tag{4.19}$$

$$2x^ox^n-\Gamma_i^{nk}\Gamma_{jk}^o x^ix^j-2\widetilde{\sigma}\widetilde{B}_ix^ix^n=0. \tag{4.20}$$

(по ε не суммировать!) определяют пучки инвариантных соприкасающихся (с гиперповерхностью (A_o)) гиперквадрик. В пучках (4.19),(4.20) содержится гиперквадрика

$$2x^ox^n-\Gamma_i^{nk}\Gamma_{jk}^o x^ix^j=0, \tag{4.21}$$

соприкасающаяся с гиперповерхностью (A_o) в точке A_o и касающаяся гиперповерхности (A_n) в точке A_n. В случае, если пара $V_{n-1,n}^o$ не имеет отличного от нуля относительного инварианта, удовлетворяющего уравнению

$$\delta X=X(\pi_n^n-\pi_o^o), \tag{4.22}$$

все инвариантно присоединенные к паре $V_{n-1,n}^o$, гиперквадрики, соприкасающиеся с гиперповерхностью (A_o) в точке A_o, проходят через точку A_n.

Рассмотрим точки

$$Q=A_n+b^iA_i, \quad \widetilde{Q}=A_n+\widetilde{B}^iA_i \tag{4.23}$$

Так как $Q\in\xi_1$, $\widetilde{Q}\in\xi_1$ и $\delta Q=\pi_n^n C$, $\delta\widetilde{Q}=\pi_n^n\widetilde{Q}$, то эти точки определяют оснащение гиперповерхности (A_o). Пучки нормалей первого рода гиперповерхности (A_o) образованы прямыми проходящими через точку A и точки

$$A_n+\rho b^iA_i, \quad A_n+\widetilde{\rho}\widetilde{B}^iA_i. \tag{4.24}$$

где ρ, $\widetilde{\rho}$ —абсолютные инварианты пары $V_{n-1,n}^o$.

Прямая $A_0 A_n$, определяющая тривиальное оснащение гиперповерхности (A_0), содержится в этих пучках. Инвариантно присоединенные к паре $V^{\circ}_{n-1,n}$ пучки определяются соответственно системами уравнений (пучки нормалей второго рода гиперповерхности (A_0))

$$x^{\circ} - (\sigma b^i \Gamma^{nk}_i \Gamma^{\circ}_{jk} + b_j) x^j = 0, \quad x^n = 0 ; \qquad (4.25)$$

$$x^{\circ} - (\tilde{\sigma} \tilde{B}^i \Gamma^{nk}_i \Gamma^{\circ}_{jk} + b_j) x^j = 0, \quad x^n = 0 . \qquad (4.26)$$

Инвариантные пучки соприкасающихся гиперквадрик гиперповерхности (A_n) и её оснащение строится аналогично. Можно показать, что если все инвариантно присоединенные к паре $V^{\circ}_{n-1,n}$ соприкасающиеся гиперквадрики гиперповерхности (A_0) в точке A_0 содержат точку A_n, то и все инвариантно присоединенные к паре $V^{\circ}_{n-1,n}$ соприкасающиеся гиперквадрики гиперповерхности (A_n) в точке A_n содержат точку A_0.

Величины $\rho_1, \rho_2, \Gamma_1, \Gamma_0$ являются инвариантами пары $V^{\circ}_{n-1,n}$. Условие $\rho_1 = 0$ $(\rho_2 = 0)$ означает, что $M_1 \equiv P_1$ $(M_2 \equiv P_2)$, условие $\Gamma_1 = 0$ характеризует принадлежность точки A_n гиперплоскости ξ_1; условие $\Gamma_0 = 0$ $(m = 0)$ означает, что проективные преобразования $\overset{*}{x}{}^j = \rho \Gamma^{nj}_i x^i$ $(\overset{*}{x}{}^j = \rho\, m^j_i x^i)$ $(n-2)$-плоскости τ являются преобразованиями W.

Литература

1. Е.Т.И в л е в, Материалы итоговой научной конференции по математике и механике за 1970г. I. Томск, 1971, 121-123.

2. Г.Ф.Л а п т е в, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Московского матем. общества, т.2, 275-383, ГИТТЛ, М., 1953.

3. В.С.М а л а х о в с к и й, Тр. Томского ун-та, 1963, 168, 28-42.

4. М.М.П о х и л а, Дифференциальная геометрия мнoгообразий фигур, Калининград 1971, 2, 55-62.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3 1973

С В Е Ш Н И К О В А Г.Л.

КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются конгруэнции кривых второго порядка с одной вырождающейся фокальной поверхностью (F). Построены канонические реперы конгруэнций, для которых поверхность (F) – линия и точка. Решена задача расслоения для случая вырождения фокальной поверхности (F) в точку.

§I. Конгруэнции коник с одной фокальной поверхностью, вырождающейся в линию.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией $\mathfrak{J}$ называется конгруэнция кривых второго порядка (коник), обладающая следующими свойствами:

1) существуют две невырождающиеся фокальные поверхности S_i $(i, j, k = 1, 2)$, не являющиеся огибающими плоскостей коник,

2) существует фокальная поверхность (F), вырождающаяся в линию, причем касательная f к линии (F) не инцидентна плоскости коники,

3) фокальные линии на поверхностях S_i не соответствуют друг другу.