УДК 514.75

М. В. Кретов [1]

[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*

blta@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-10

Комплексы эллиптических цилиндров с характеристическим многообразием образующего элемента в виде координатных прямых

Исследуется в трехмерном аффинном пространстве комплекс (трехпараметрическое семейство) эллиптических цилиндров, у которого характеристическое многообразие образующего элемента состоит из трех координатных осей. Геометрически охарактеризовано фокальное многообразие образующего элемента рассматриваемого многообразия. Получены геометрические свойства исследуемого комплекса.

Ключевые слова: комплекс, репер, цилиндр, аффинное пространство, характеристическое многообразие, фокальное многообразие, индикатриса вектора, конгруэнция.

В трехмерном аффинном пространстве продолжается исследование комплексов (трехпараметрических семейств) эллиптических цилиндров, изучение которых было начато ранее [1; 2], в репере $r = \{A, \overline{e_i}\}$, $i,\ j,\ k = \overline{1{,}3}$, построенном в указанных работах.

Будем рассматривать комплексы $\hat{Z}_1$ и $\hat{Z}_2$, исследованные в работе [2].

Поступила в редакцию 19.11.2018 г.

Согласно статье [2], уравнение цилиндра q и системы дифференциальных уравнений комплексов $\hat{Z}_1$ и $\hat{Z}_2$ соответственно имеют вид

$$F \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0; \qquad (1)$$

$$\omega^2 = A_1^2\theta^1, \qquad (2)$$

$$\omega_1^1 = \omega_1^3 = \omega_2^3 = \omega_2^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = \omega^3 = \omega^1 = 0;$$

$$\omega^2 = A_1^2\theta^1 - \varepsilon\theta^2, \quad \omega_1^1 = -\omega^1, \quad \omega_1^3 = \theta^1, \quad \omega^1 = \alpha\theta^1, \qquad (3)$$

$$\omega_2^3 = \omega_2^1 = \omega_3^3 = \omega_2^2 = \omega^3 = 0,$$

где $\theta^1 = \omega_3^1$, $\theta^2 = \omega_3^2$, $\theta^3 = \omega_1^2$.

Характеристическое многообразие [3] цилиндра q задается системой уравнений

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0, \qquad (4)$$

где F_k удовлетворяют уравнению $-\frac{1}{2}dF = F_k\theta^k$.

Для комплексов $\hat{Z}_1$ система уравнений (4) имеет вид

$$x^1x^3 + A_1^2x^2 = 0, \quad x^2x^3 = 0, \quad x^1x^2 = 0, \qquad (5)$$

а для комплексов $\hat{Z}_2$ эта система выглядит следующим образом:

$$-\alpha(x^1)^2 + \alpha x^1 + x^1x^3 + A_1^2x^2 = 0, \quad x^2(x^3 - \varepsilon) = 0, \quad x^1x^2 = 0. \qquad (6)$$

Из уравнений (5) и (6) следует, что только один подкласс из многообразий фигур $\hat{Z}_1$ и $\hat{Z}_2$ обладает характеристическим многообразием образующего элемента, состоящим из трех координатных осей $(A, \bar{e}_1)$, $(A, \bar{e}_2)$ и $(A, \bar{e}_3)$ при $A_1^2 = 0$. Обозначим этот подкласс символом Z^*. Система дифференциальных уравнений этого подкласса будет иметь вид

$$\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = \omega_1^1 = \omega_1^3 = \omega_2^1 = \omega_2^3 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0 . \qquad (7)$$

Анализируя систему дифференциальных уравнений (7) в соответствии с методикой, содержащейся в работе [4], убеждаемся в том, что комплексы Z^* существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений, что позволяет построить геометрическую модель исследуемого многообразия по аналогии с работой [5].

Фокальное многообразие [3] цилиндра, описывающего комплекс Z^*, задается следующей системой уравнений:

$$x^1x^3 = 0, \quad x^2x^3 = 0, \quad x^1x^2 = 0, \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0 . \qquad (8)$$

Из последней системы уравнений следует

Теорема 1. *Фокальное многообразие* [3] *цилиндра, описывающего комплекс* Z^**, состоит из четырех точек, являющихся концами векторов* $\overline{e}_1$, $-\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ *и* $-\overline{e}_2$.

Обозначая через A_i концы векторов $\overline{e}_i$, M_i — текущие точки координатных осей $(A, \overline{e}_i)$, M_{3+i} — текущие точки координатных плоскостей $(A, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$, $(A, \overline{e}_1, \overline{e}_3)$ и $(A, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ соответственно, для исследуемого многообразия получаем:

$$\begin{aligned}
&dA = 0, d\overline{e}_1 = \theta^3\overline{e}_2, \quad d\overline{e}_2 = 0, \quad d\overline{e}_3 = \theta^1\overline{e}_1 + \theta^2\overline{e}_2, \\
&dA_1 = \theta^3\overline{e}_3, \quad dA_2 = 0, \quad dA_3 = \theta^1\overline{e}_1 + \theta^2\overline{e}_2, \\
&dM_1 = dx^1\overline{e}_1 + x^1\theta^3\overline{e}_2, \quad dM_2 = dx^1\overline{e}_2, \\
&dM_3 = x^3\theta^1\overline{e}_1 + x^3\theta^2\overline{e}_2 + dx^3\overline{e}_3, \qquad (9) \\
&dM_4 = dx^1\overline{e}_1 + (dx^2 + x^1\theta^3)\overline{e}_2, \\
&dM_5 = (dx^1 + x^3\theta^1)\overline{e}_1 + (x^1\theta^3 + x^3\theta^2)\overline{e}_2 + dx^3\overline{e}_3, \\
&dM_6 = x^3\theta^1\overline{e}_1 + (dx^2 + x^3\theta^2)\overline{e}_2 + dx^3\overline{e}_3.
\end{aligned}$$

Назовем координатную плоскость (A, $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$) первой координатной плоскостью.

Анализируя и дифференцируя формулы (9) согласно методике исследования, изложенной в книге [6], получаем теорему.

Теорема 2. *Комплексы Z^* обладают следующими геометрическими свойствами:*

1) центр луча прямолинейной конгруэнции осей цилиндра, индикатриса вектора $\overline{e}_2$, координатная прямая ($A, \overline{e}_2$) и первая координатная плоскость неподвижны;

2) индикатриса вектора $\overline{e}_1$ описывает однопараметрическое семейство линий с касательными, параллельными вектору $\overline{e}_2$;

3) конец вектора $\overline{e}_1$ описывает однопараметрическое семейство линий с касательными, параллельными вектору $\overline{e}_3$;

4) индикатриса вектора $\overline{e}_3$ и конец этого вектора описывают конгруэнции плоскостей, параллельных первой координатной плоскости;

5) *точки координатной прямой ($A, \overline{e}_1$) и первой координатной плоскости описывают однопараметрические семейства плоскостей, параллельных указанной выше координатной плоскости.*

Список литературы

1. *Кретов М.В.* Комплексы эллиптических цилиндров // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2005. Вып. 36. С. 54—59.

2. *Виноградова Н.В., Воротникова О.В., Кретов М.В.* О подклассах комплексов эллиптических цилиндров // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2013. Вып. 44. С. 28—32.

3. *Малаховский В.С., Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Труды Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1974. Т. 6. С. 113—133.

4. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

5. *Кретов М.В.* Геометрическая модель трехпараметрического семейства эллипсоидов // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физ.-мат. науки. 2014. Вып. 4. С. 163—167.
6. *Малаховский В.С.* Краткий курс дифференциальной геометрии. Калининград, 2010.

M. Kretov[1]
[1] *Immanuel Kant Balic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
blta@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-10

Complexes of elliptic cylinders with a characteristic manifold of the generator element in the form of coordinate straight lines

Submitted on November 19, 2018

The complex (three-parameter family) of elliptic cylinders is investigated in the three-dimensional affine space, in which the characteristic multiplicity of the forming element consists of three coordinate axes. The focal variety of the forming element of the considered variety is geometrically characterized. Geometric properties of the complex under study were obtained.

It is shown that the studied manifold exists and is determined by a completely integrable system of differential equations. It is proved that the focal variety of the forming element of the complex consists of four geometrically characterized points. The center of the ray of the straight-line congruence of the axes of the cylinder, the indicatrix of the second coordinate vector, the second coordinate line and one of the coordinate planes are fixed. The indicatrix of the first coordinate vector describes a one-parameter family of lines with tangents parallel to the second coordinate vector. The end of the first coordinate vector describes a one-parameter family of lines with tangents parallel to the third coordinate vector. The indicatrix of the third coordinate vector and its end describe congruences of planes parallel to the first coordinate plane. The points of the first coordinate line and the first coordinate plane describe one-parameter families of planes parallel to the coordinate plane indicated above.

Keywords: complex, frame, cylinder, affine space, characteristic manifold, focal manifold, indicatrix of a vector, congruence.

References

1. *Kretov M. V.:* Complexes of elliptic cylinders. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 36, 54—59 (2005) (in Russian).

2. *Vinogradova N. V., Vorotnikova O. V., Kretov M. V.:* On subclasses of complexes of elliptic cylinders. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 44, 28—32 (2013) (in Russian).

3. *Malakhovsky V. S., Makhorkin V. V.:* Differential geometry of varieties of hyperquadrics in n-dimensional projective space. Trudy Geom. Semin. VINITI. 6, 113—133 (1974) (in Russian).

4. *Malakhovsky V. S.:* Introduction to the theory of external forms. Kaliningrad (1978) (in Russian).

5. *Kretov M. V.* Geometric model of the three-parameter family of ellipsoids. IKBFU's Vestnik: Physics, Mathematics. 4, 163—167 (2014) (in Russian).

6. *Malakhovsky V. S.:* Short course of differential geometry. Kaliningrad (2010) (in Russian).