УДК 514.76

К. В. Башашина[1]

[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
KBashashina@kantiana.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-3

Приклеенная линейная связность на поверхности проективного пространства

В многомерном проективном пространстве рассмотрена поверхность как многообразие центрированных плоскостей. Над этим многообразием возникает приклеенное расслоение линейных кореперов, которое не является главным расслоением. Задание связности в таком расслоении превращает его в пространство приклеенной линейной связности. Доказано, что объект кривизны является тензором. Найдено условие, при котором пространство приклеенной линейной связности превращается в пространство проективной связности Картана.

Ключевые слова: поверхность проективного пространства, приклеенное расслоение, линейная связность, приклеенная линейная связность, проективная связность Картана, тензор кривизны.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A_I\}$ $(I, J, K = \overline{0, n})$, деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_I = \omega_I^J A_J\,. \tag{1}$$

Поступила в редакцию 09.05.2020 г.

Структурные уравнения неэффективно действующей в пространстве P_n линейной группы $GL(n+1)$ запишем в виде

$$d\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I . \tag{2}$$

В пространстве P_n рассмотрим m-мерную поверхность X_m как семейство касательных плоскостей. Произведем специализацию подвижного репера $\{A_0, A_i, A_\alpha\}$ $(i,... = \overline{1, m}$; $\alpha, ... = \overline{m+1, n})$, помещая вершину A_0 в точку поверхности X_m, вершины A_i — в касательную плоскость T_m, а вершины A_α — вне касательной плоскости.

Перепишем формулы (1) с учетом разбиения индексов:

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_0^0 A_0 + \omega_0^i A_i + \omega_0^\alpha A_\alpha, \\ dA_i &= \omega_i^0 A_0 + \omega_i^j A_j + \omega_i^\alpha A_\alpha, \\ dA_\alpha &= \omega_\alpha^0 A_0 + \omega_\alpha^i A_i + \omega_\alpha^\beta A_\beta. \end{aligned}$$

Вершина A_0 является точкой касания плоскости T_m к поверхности X_m^0, описанной этой вершиной; значит, ее бесконечно малое перемещение лежит в T_m: $dA_0 \in T_m$, следовательно

$$\omega_0^\alpha = 0 . \tag{3}$$

Замыкая это уравнение и разрешая по лемме Картана, получим

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j, \; b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha, \; \omega^i = \omega_0^i . \tag{4}$$

Уравнения (3, 4_1) определяют поверхность X_m в заданном репере.

Продолжая уравнения (4_1), найдем дифференциальные уравнения на функции b_{ij}^α :

$$\Delta b_{ij}^\alpha + b_{ij}^\alpha \omega_0^0 = b_{ijk}^\alpha \omega^k, \; b_{ijk}^\alpha = b_{ikj}^\alpha = b_{jik}^\alpha , \tag{5}$$

где дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta b^{\alpha}_{ij} = db^{\alpha}_{ij} - b^{\alpha}_{ik}\omega^{k}_{j} - b^{\alpha}_{kj}\omega^{k}_{i} + b^{\beta}_{ij}\omega^{\alpha}_{\beta}.$$

Из уравнений (5_1) видно, что объект b^{α}_{ij} является тензором и называется основным тензором поверхности (см., напр., [1, с. 170]).

Из структурных уравнений (2) с учетом уравнений ($3, 4_1$) получим

$$d\omega^{i} = \omega^{j} \wedge (\omega^{i}_{j} - \delta^{i}_{j}\omega^{0}_{0}), \tag{6}$$

$$d\omega^{i'}_{j'} = \omega^{k'}_{j'} \wedge \omega^{i'}_{k'} + \omega^{k} \wedge \omega^{i'}_{j'k} \quad (i', j', k' = \overline{0, m}), \tag{7}$$

где $\omega^{i'}_{j'k} = b^{\alpha}_{j'k}\omega^{i'}_{\alpha}$ $(b^{\alpha}_{0k} = 0)$.

Эти уравнения аналогичны структурным уравнениям главного расслоения линейных кореперов $L_{(m+1)^2}(X_m)$ над поверхностью X_m с типовым слоем — линейной группой

$$L_{(m+1)^2} = GL(m+1).$$

Однако, поскольку m базисных форм ω^{i} входят в совокупность форм $\omega^{i'}_{j'}$, будем говорить о приклеенном расслоении линейных кореперов, которое обозначим $L_{(m+1)^2-m}(X_m)$.

Применим способ Лаптева — Лумисте [2, с. 62, 82; 3] задания связности в главном расслоении для определения связности в приклеенном расслоении $L_{(m+1)^2-m}(X_m)$:

$$\tilde{\omega}^{i'}_{j'} = \omega^{i'}_{j'} - \Pi^{i'}_{j'k}\omega^{k}. \tag{8}$$

Найдем внешние дифференциалы этих форм, используя уравнения (6, 7):

$$d\tilde{\omega}^{i'}_{j'} = \tilde{\omega}^{k'}_{j'} \wedge \tilde{\omega}^{i'}_{k'} + \omega^{k} \wedge (d\Pi^{i'}_{j'k} - \Pi^{i'}_{j'l}\omega^{l}_{k} - \Pi^{i'}_{l'k}\omega^{l'}_{j'} + \Pi^{l'}_{j'k}\omega^{i'}_{l'} +$$
$$+ \Pi^{i'}_{j'k}\omega^{0}_{0} + \tilde{\omega}^{i'}_{j'k}) - \Pi^{m'}_{j'k}\Pi^{i'}_{m'l}\omega^{k} \wedge \omega^{l}.$$

Пусть компоненты $\Pi^{i'}_{j'k}$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\Delta\Pi^{i'}_{j'k} + \Pi^{i'}_{j'k}\omega^0_0 + \omega^{i'}_{j'k} = \Pi^{i'}_{j'kl}\omega^l . \qquad (9)$$

Структурные уравнения форм приклеенной связности окончательно запишем в виде

$$d\tilde{\omega}^{i'}_{j'} = \tilde{\omega}^{k'}_{j'} \wedge \tilde{\omega}^{i'}_{k'} + R^{i'}_{j'kl}\omega^k \wedge \omega^l , \qquad (10)$$

где компоненты объекта кривизны выражаюся по формулам

$$R^{i'}_{j'kl} = \Pi^{i'}_{j'[kl]} - \Pi^{m'}_{j'[k}\Pi^{i'}_{m'l]} , \qquad (11)$$

причем по крайним индексам в скобках производится альтернирование.

Для продолжения уравнения (9) найдем внешние дифференциалы форм $\omega^{i'}_{j'k}$:

$$d\omega^{i'}_{j'k} = d(b^{\alpha}_{j'k}\omega^{i'}_{\alpha}) = db^{\alpha}_{j'k} \wedge \omega^{i'}_{\alpha} + b^{\alpha}_{j'k}(\omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega^{i'}_{\beta} + \omega^{m'}_{\alpha} \wedge \omega^{i'}_{m'}) =$$
$$= (b^{\alpha}_{j'm}\omega^m_k + b^{\alpha}_{m'k}\omega^{m'}_{j'} - b^{\beta}_{j'k}\omega^{\alpha}_{\beta} + b^{\alpha}_{j'kl}\omega^l) \wedge \omega^{i'}_{\alpha} +$$
$$+ b^{\alpha}_{j'k}\omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega^{i'}_{\beta} + b^{\alpha}_{j'k}\omega^{m'}_{\alpha} \wedge \omega^{i'}_{m'}.$$

Приведем подобные слагаемые и воспользуемся обозначениями для трехиндексных форм ω:

$$d\omega^{i'}_{j'k} = -\underbrace{b^{\alpha}_{j'k}\omega^{i'}_{\alpha}}_{\omega^{i'}_{j'm}} \wedge \omega^m_k - \underbrace{b^{\alpha}_{m'k}\omega^{i'}_{\alpha}}_{\omega^{i'}_{m'k}} \wedge \omega^{m'}_{j'} + \underbrace{b^{\alpha}_{j'k}\omega^{m'}_{\alpha}}_{\omega^{m'}_{j'k}} \wedge \omega^{i'}_{m'} + \omega^l \wedge \underbrace{b^{\alpha}_{j'kl}\omega^{i'}_{\alpha}}_{\omega^{i'}_{j'kl}}.$$

Окончательно имеем

$$d\omega^{i'}_{j'k} = \omega^{m'}_{j'k} \wedge \omega^{i'}_{m'} - \omega^{i'}_{m'k} \wedge \omega^{m'}_{j'} - \omega^{i'}_{j'm} \wedge \omega^m_k + \omega^m \wedge \omega^{i'}_{j'km},$$

где $\omega^{i'}_{j'km} = b^{\alpha}_{j'km}\omega^{i'}_{\alpha}$, $\omega^{i'}_{j'[km]} = 0$.

Уравнения на продолжения компонент объекта связности Π имеют вид:

$$\Delta \Pi^{i'}_{j'kl} + 2\Pi^{i'}_{j'kl}\omega^0_0 - \Pi^{i'}_{m'k}\omega^{m'}_{j'l} - \Pi^{i'}_{j'm}\omega^m_{kl} + \Pi^{m'}_{j'k}\omega_{m'l}^{\ \ i'} + \\ + \Pi^{i'}_{j'k}\omega^0_l + \Pi^{i'}_{j'l}\omega^0_k + \omega_{j'kl}^{\ \ i'} = \Pi^{i'}_{j'klm}\omega^m. \qquad (12)$$

Используя формулы (9, 11, 12), найдем дифференциальные сравнения по модулю базисных форм на компоненты объекта кривизны R рассматриваемой связности:

$$\Delta R^{i'}_{j'kl} + 2R^{i'}_{j'kl}\omega^0_0 \equiv 0 \ \ (mod\,\omega^i\,). \qquad (13)$$

Теорема 1. *Связность в приклеенном расслоении линейных кореперов* $L_{(m+1)^2-m}(X_m)$ *задается с помощью поля объекта связности* $\Pi^{i'}_{j'k}$*, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (9). Объект связности* $\Pi^{i'}_{j'k}$ *определяет формы связности (8), удовлетворяющие структурным уравнениям (10), в которые входят компоненты объекта кривизны* $R^{i'}_{j'kl}$*, выражающиеся по формуле (11) через объект связности* $\Pi^{i'}_{j'k}$ *и его пфаффовы производные. Объект кривизны приклеенной линейной связности является тензором, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным сравнениям (13).*

Определение. Расслоение приклеенных линейных кореперов $L_{(m+1)^2-m}(X_m)$ со структурными уравнениями (6, 7), в котором задана связность полем объекта $\Pi^{i'}_{j'k}$, назовем *пространством приклеенной линейной связности* $L_{(m+1)^2-m,m}$, имеющим структурные уравнения (6, 10).

Распишем уравнения на компоненты связности (9) подробно:

$$\Delta \Pi^i_{0k} \equiv 0, \ \ \Delta \Pi^0_{0k} + \Pi^0_{0k}\omega^0_0 + \Pi^l_{0k}\omega^0_l \equiv 0,$$
$$\Delta \Pi^i_{jk} + \Pi^i_{jk}\omega^0_0 - \Pi^i_{0k}\omega^0_j + \omega^i_{jk} \equiv 0,$$
$$\Delta \Pi^0_{jk} + 2\Pi^0_{jk}\omega^0_0 - \Pi^0_{0k}\omega^0_j + \Pi^l_{jk}\omega^0_l + \omega^0_{jk} \equiv 0.$$

Положим простейшую тензорную часть объекта связности Π равной нулю: $\Pi^i_{0k}=0$. Тогда уравнения остальных компонент упростятся:

$$\begin{cases} \Delta\Pi^0_{0k}+\Pi^0_{0k}\omega^0_0\equiv 0, \\ \Delta\Pi^i_{jk}+\Pi^i_{jk}\omega^0_0+\omega^i_{jk}\equiv 0, \\ \Delta\Pi^0_{jk}+2\Pi^0_{jk}\omega^0_0-\Pi^0_{0k}\omega^0_j+\Pi^l_{jk}\omega^0_l+\omega^0_{jk}\equiv 0. \end{cases}$$

Значит, справедлива

Теорема 2. *Если подтензор Π^i_{0k} объекта связности $\Pi^{i'}_{j'k}$ обращается в нуль, то $\widetilde{\omega}^i_0=\omega^i$, поэтому пространство приклеенной линейной связности $L_{(m+1)^2-m,m}$ становится пространством проективной связности Картана $P_{m,m}$ (см., напр., [2, с. 119; 4, с. 23; 5]) со структурными уравнениями (10), ассоциированными с поверхностью X_m проективного пространства P_n.*

Список литературы

1. *Базылев В.Т.* Геометрия дифференцируемых многообразий. М., 1989.

2. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. Т. 9. М., 1979. С. 1—248.

3. *Шевченко Ю.И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // ДГМФ. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 179—187.

4. *Столяров А.В., Глухова Т.Н.* Конформно-дифференциальная геометрия оснащенных многообразий. Чебоксары, 2007.

5. *Шевченко Ю.И.* Об оснащении Картана // ДГМФ. Калининград, 1983. Вып. 14. С. 107—110.

K. V. Bashashina[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
KBashashina@kantiana.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-3

Glued linear connection on surface of the projective space

Submitted on May 9, 2020

We consider a surface as a variety of centered planes in a multidimensional projective space. A fiber bundle of the linear coframes appears over this manifold. It is important to emphasize the fiber bundle is not the principal bundle. We called it a glued bundle of the linear coframes. A connection is set by the Laptev — Lumiste method in the fiber bundle. The ifferential equations of the connection object components have been found. This leads to a space of the glued linear connection. The expressions for a curvature object of the given connection are found in the paper. The theorem is proved that the curvature object is a tensor. A condition is found under which the space of the glued linear connection turns into the space of Cartan projective connection.

The study uses the Cartan — Laptev method, which is based on calculating external differential forms. Moreover, all considerations in the article have a local manner.

Keywords: projective space surface, glued bundle, linear connection, glued linear connection, Cartan projective connection, curvature tensor.

References

1. *Bazylev, V.T.:* The geometry of differentiable manifolds. Moscow (1989).

2. *Evtuchik, L.E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N.M., Širokov, A.P.:* Differential-geometric structures on manifolds. J. Soviet Math., **14**:6, 1573—1719 (1980).

3. *Shevchenko, Yu. I.:* Laptev and Lumiste methods connectivity in the main bundle. DGMF. Kaliningrad. 37, 179—187 (2006).

4. *Stolyarov A.V., Glukhova T.N.:* Conformal differential geometry of framed manifolds. Cheboksary (2007).

5. *Shevchenko, Yu.I.:* About Cartan equipment. DGMF. Kaliningrad. 14, 107—110 (1983).