УДК 517.548

А. С. Кочина

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Поступила в редакцию 25.01.2021 г.
Рецензия от 20.02.2021 г.

Рассматриваются параметризации некоторых поверхностей с использованием функций комплексного переменного, которые позволяют получать различные координатные сетки. Описана возможность моделирования тел при помощи задания общей области проецирования.

Parameterizations of some surfaces using functions of a complex variable are considered, while obtaining different coordinate grids. The possibility of modeling bodies by setting the General projection area is described.

Ключевые слова: комплексная функция, конформные отображения, параметризация поверхностей, моделирование поверхностей

Keywords: complex function, conformal maps, parameterization of surfaces, surface modeling

Как известно, регулярная поверхность в окрестности каждой точки допускает бесчисленное множество параметризаций. Рассмотрим некоторые из них, используя функции комплексного переменного.

Будем брать в качестве областей параметров области, задаваемые при помощи комплексного переменного

$$z = x + iy,\ \ z = re^{i\varphi}.$$

Выбирая переменные $(x,y)u(r,\varphi)$ различным образом, можно задать различные элементарные области. Далее, используя функции комплексного переменного, задающие топологическое отображение, можно получить новые элементарные образы и координатные линии, причем новые координатные линии будут ортогональны. Покажем это.

Пусть задана функция комплексного переменного

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Здесь и далее будем рассматривать аналитические функции.

Обозначим за y-линии $r_y\{u(x_0,y);v(x_0,y)\}$, за x-линии — $r_x\{u(x,y_0);v(x,y_0)\}$. Тогда касательные к этим линиям имеют вид

$$r_y' = \{u_y';v_y'\}, r_x' = \{u_x';v_x'\}.$$

Так как функция $f(z)$ — аналитическая, то выполняются условия Коши — Римана, то есть

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}.$$

Тогда

$$r'_y \cdot r'_x = u'_y \cdot u'_x + v'_y \cdot v'_x = u'_y \cdot v'_y + v'_y \cdot (-u'_y) = 0.$$

Таким образом, y-линии и x-линии при любом отображении с помощью аналитических функций задают ортогональную сетку на плоскости.

Можно сделать вывод о том, что с помощью системы

$$\begin{cases} u = Ref(z) \\ v = Imf(z) \end{cases}$$

мы имеем возможность задавать различные области Oxy с ортогональной сеткой.

Эти области также можно взять в качестве проекций некоторых поверхностей, тем самым осуществляя параметризацию этих поверхностей.

Рассмотрим параметризации некоторых элементарных поверхностей.

Зададим параметризацию кругового конуса:

$$\Omega_1 : \{Ref(z), Imf(z), |f(z)|\}.$$

Нетрудно заметить, что

$$(Ref(z))^2 + (Imf(z))^2 = |f(z)|^2.$$

Данное равенство является каноническим уравнением кругового конуса. Используя различные функции $f(z)$, можно задавать параметризации этого конуса, тем самым вырезая из него различные части. Рассмотрим некоторые виды параметризации конуса.

1. Прямоугольная параметризация.

Множество точек

$$z = x + iy, \; x_0 \le x \le x_1, \; y_0 \le y \le y_1$$

задает прямоугольную область D. Тогда параметризация конуса, проекция которого на плоскость Oxy есть область D, имеет вид (рис. 1)

$$R(x, y) = \left\{x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right\}.$$

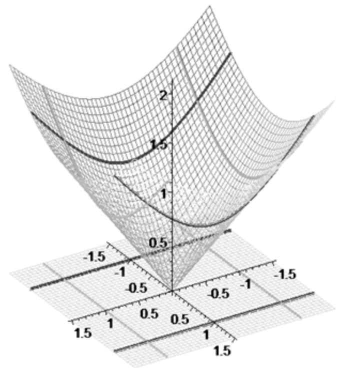

Рис. 1. Параметризация с помощью функции $f(z)=z$

2. Параболическая параметризация.

Рассмотрим функцию $\omega=f(z)=z^2=x^2-y^2+2xyi$, тогда другая параметризация конуса имеет вид (рис. 2)

$$R(x,y)=\{x^2-y^2,2xy,x^2+y^2\}.$$

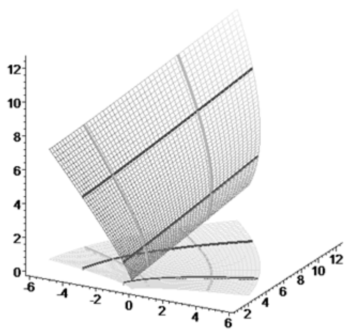

Рис. 2. Параметризация с помощью функции $f(z)=z^2$

Следует отметить, что в данном примере в качестве области D рассматривается прямоугольник, не содержащий начало координат, так как нарушается условие однолистности $(f'(z)\neq 0,\forall z\in D)$. Действительно, $f'(z)=2z\neq 0\Leftrightarrow z\neq 0.$

3. Полярная параметризация.

Рассмотрим множество точек D таких, что

$$z=\rho e^{i\varphi},\ \ \rho_0\leq\rho\leq\rho_1,\ \ \varphi_0\leq\varphi\leq\varphi_1.$$

В общем случае это множество является кольцевой областью. Тогда параметризация конуса приобретает вид (рис. 3)

$$R(\rho,\varphi)=\{\rho cos\varphi,\rho sin\varphi,\rho\}.$$

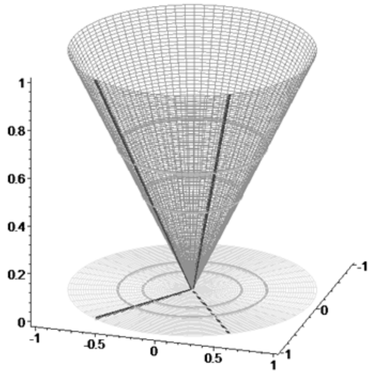

Рис. 3. Полярная параметризация

4. Рассмотрим функцию $\omega = f(z) = sinz$.

Найдем действительную и мнимую части функции $f(z)$, а также ее модуль:

$$f(z) = \sin(\rho e^{i\varphi}) = sin(\rho cos\varphi + i\rho sin\varphi) =$$

$$= sin(\rho cos\varphi)ch(\rho sin\varphi) + icos(\rho cos\varphi)sh(\rho sin\varphi),$$

$$|f(z)| = \sqrt{sin^2(\rho cos\varphi)ch^2(\rho sin\varphi) + cos^2(\rho cos\varphi)sh^2(\rho sin\varphi)},$$

$$|f(z)| = \sqrt{sin^2(\rho cos\varphi) + sh^2(\rho sin\varphi)}.$$

Тогда параметризация конуса имеет вид

$$R(\rho,\varphi) = \begin{cases} sin(\rho cos\varphi)ch(\rho sin\varphi), \\ cos(\rho cos\varphi)sh(\rho sin\varphi), \\ \sqrt{sin^2(\rho cos\varphi) + sh^2(\rho sin\varphi)}. \end{cases}$$

Изобразим его (рис. 4).

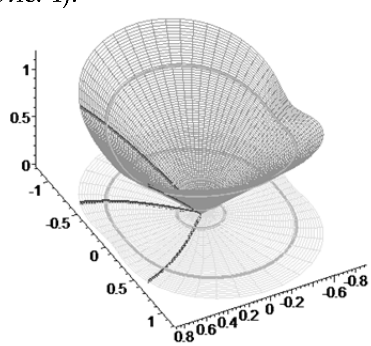

Рис. 4. Полярная параметризация при помощи $f(z) = sinz$

5. Рассмотрим множество точек

$$z = \rho cos\varphi e^{i\varphi},\ 0 \le \rho \le \rho_1,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},$$

которое задает внутренность окружности диаметра ρ_1, проходящей через начало координат. Для параметризации конуса используем функцию $f(z) = z^2$. Образом этой окружности является кардиоида (рис. 5).

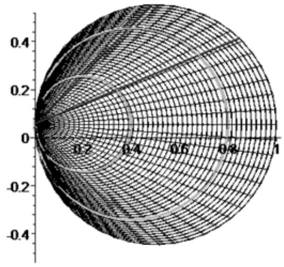

Рис. 5. Множество точек $z = \rho cos\varphi e^{i\varphi}$

Тогда уравнение конуса имеет вид

$$R(\rho,\varphi) = \begin{cases} \rho^2 cos^2\varphi cos2\varphi \\ \rho^2 cos^2\varphi sin2\varphi \\ \rho^2 cos^2\varphi \end{cases}.$$

Изобразим его (рис. 6).

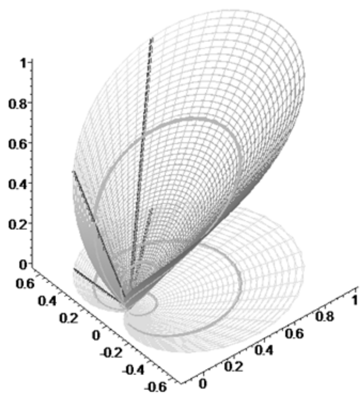

Рис. 6. Полярная параметризация конуса при помощи отображения $f(z) = z^2$

6. Используя параметризацию

$$\Omega_2 : \left\{ Ref(z),\ Imf(z),\ |f(z)|^2 \right\},$$

можно задавать параболоид вращения, так как

$$\left(Ref\left(z\right)\right)^2+\left(Imf\left(z\right)\right)^2=\left|f(z)\right|^2.$$

Рассмотрим параметризацию параболоида, используя в качестве прообраза множество точек из примера 5, а в качестве функции $f\left(z\right)=z^2$.

Тогда уравнение параболоида будет иметь вид (рис. 7)

$$K\left(\rho,\varphi\right)=\left\{\rho^2cos^2\varphi cos2\varphi,\rho^2cos^2\varphi sin2\varphi,\rho^4cos^4\varphi\right\}.$$

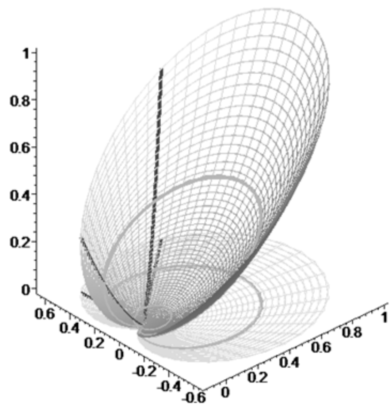

Рис. 7. Параметризация параболоида при помощи отображения $f\left(z\right)=z^2$

7. Задание цилиндра.

Рассмотрим множество точек

$$z=\rho e^{i\varphi},\ \ \rho_0\le\rho\le\rho_1,\ \ \varphi_0\le\varphi\le\varphi_1,$$

которое задает некоторую область D, являющуюся проекцией цилиндра. Тогда уравнение такого цилиндра имеет вид

$$\Omega_3:\left\{Ref\left(\rho_1,\varphi\right),Imf\left(\rho_1,\varphi\right),h\right\},\ \varphi_0\le\varphi\le\varphi_1,\ \ h_0\le h\le h_1.$$

Таким образом, задавая область проекций поверхностей при помощи комплексных функций, можно комбинировать участки поверхностей и создавать составные поверхности (склейки).

Построим склейку, состоящую из трех поверхностей: плоскости $z=0$, цилиндрической поверхности и конуса, проекциями которых на плоскость $z=0$ являются кардиоиды.

Рассмотрим множество точек

$$z=\rho cos\varphi e^{i\varphi},\ \ 0\le\rho\le\rho_1,\ \ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\ \text{(рис. 5).}$$

Область на плоскости $z=0$ зададим с помощью функции $f(z)=z^2$:

$$R_1(\rho,\varphi)=\{Ref(z), Imf(z), 0\}==\{\rho^2 cos^2\varphi cos2\varphi, \rho^2 cos^2\varphi sin2\varphi, 0\}.$$

Поверхность конуса задается следующим образом:

$$R_2(\rho,\varphi)=\{r_{2x}(\rho,\varphi), r_{2y}(\rho,\varphi), r_{2z}(\rho,\varphi)\}=$$

$$=\{Ref(z), Imf(z), |f(z)|\}=$$

$$=\{\rho^2 cos^2\varphi cos2\varphi, \rho^2 cos^2\varphi sin2\varphi, \rho^2 cos^2\varphi\},$$

$$0\le\rho\le\rho_1,\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

Цилиндрическая поверхность имеет вид

$$R_3(h,\varphi)=\{Re(f(\rho_1,\varphi), Imf(\rho_1,\varphi), h\}=$$

$$=\{\rho_1^2 cos^2\varphi cos2\varphi, \rho_1^2 cos^2\varphi sin2\varphi, h\},$$

где

$$0\le h\le r_{2z}(\rho_1,\varphi)$$

или

$$0\le h\le \rho_1^2 cos^2\varphi.$$

Изобразим полученное тело (рис. 8).

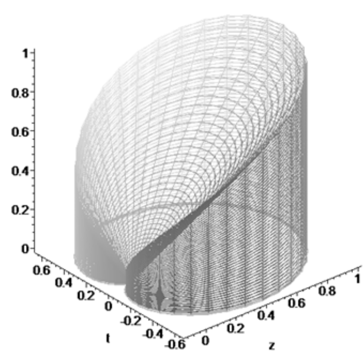

Рис. 8. Цилиндрическая склейка

Таким образом, с помощью функций комплексного переменного создаются области, которые можно использовать в качестве проекций различных поверхностей. Это дает возможность для моделирования более сложных геометрических объектов.

Список литературы

1. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Г.И. Макаренко Г.И.* Функции комплексного переменного. М., 2003.

2. *Клочко Т.В., Парфенова Н.Д.,* Решение задач комплексного анализа средствами MAPLE. Харьков, 2009.

3. *Кочина А.С.* Замечательные кривые как образы окружностей и прямых при конформных отображениях // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2018. Вып. 49. С. 101—106.

Об авторе

Александра Сергеевна Кочина — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: a_kochina@mail.ru

The author

Alexandra S. Kochina, Assistant Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: a_kochina@mail.ru