ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.19 1988

УДК 514.76

ДВОЙСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ $H_m \subset P_{n,n}$

А.В. Столяров
(Чувашский пединститут)

Согласно работе [1], геометрия регулярной гиперполосы $H_m \subset P_{n,n}$ получается из той части геометрии голономного гиперполосного распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ m-мерных линейных элементов, которая определяется полями фундаментальных подобъектов $\{\Lambda^n_{ij}, \Lambda^n_{ijk}, \dots\}$, $\{(M^v_{ij}, \Lambda^n_{ij}), \dots\}$, $\{N^i_{vj}, \dots\}$, $i,j,k = \overline{1,m}$; $u,v,w = \overline{m+1, n-1}$.

В работе [2] построена двойственная теория регулярного гиперполосного распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$. Но, в отличие от $\mathcal{H}$, построение двойственной геометрии регулярной гиперполосы $H_m \subset P_{n,n}$ наталкивается на трудность такого характера, как отсутствие на ней поля тензора Λ^n_{uv} (см. [1], [2]) первого порядка, играющего существенную роль при построении двойственной геометрии $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$. Настоящая работа и посвящена разрешению этой задачи.

I. Г.Ф.Лаптевым [3] показано, что с третьим дифференциальным продолжением n-мерного гладкого многообразия B_n в качестве подчиненной структуры связана геометрия пространства проективной связности $P_{n,n}$; базой этого пространства служит многообразие B_n, а слоями – центропроективные пространства P_n. Полученное пространство $P_{n,n}$ и есть классическое пространство проективной связности, определенное Э.Картаном [4] с помощью $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\omega^{\bar{K}}_{\bar{J}}$, подчиненных структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega^{\bar{J}}_{\bar{K}} = \omega^{\bar{L}}_{\bar{K}} \wedge \omega^{\bar{J}}_{\bar{L}} + \frac{1}{2} R^{\bar{J}}_{\bar{K}PQ}\, \omega^P_0 \wedge \omega^Q_0, \quad \omega^{\bar{L}}_{\bar{L}} = 0, \tag{I}$$

$\bar{J}, \bar{K}, \bar{L} = \overline{0,n}$; $J, K, L, P, Q = \overline{1,n}$.

В пространстве $P_{n,n}$ рассмотрим регулярную гиперполосу H_m $(m < n-1)$; в репере первого порядка $\{A_{\bar{J}}\}$ дифференциальные уравнения многообразия $H_m \subset P_{n,n}$ имеют вид (см. [1], [5]):

$$\left.\begin{aligned} \omega^n_0 = \omega^v_0 = \omega^n_v = 0, \quad \omega^n_i = \Lambda^n_{ij}\, \omega^j_0, \\ \omega^v_i = M^v_{ij}\, \omega^j_0, \quad \omega^i_v = N^i_{vj}\, \omega^j_0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

причем справедливы соотношения

$$2\Lambda^n_{[ij]} = -R^n_{0ij}, \quad 2M^v_{[ij]} = -R^v_{0ij}, \quad 2\Lambda^n_{k[i} N^k_{|v|j]} = R^n_{vij}. \tag{3}$$

В силу регулярности гиперполосы тензор Λ^n_{ij} первого порядка

$$\nabla_d \Lambda^n_{ij} + \Lambda^n_{ij}\, \omega^0_0 = \Lambda^n_{ijk}\, \omega^k_0, \quad 2\Lambda^n_{i[jk]} = -R^n_{ijk} + \Lambda^n_{is} R^s_{0jk} \tag{4}$$

является невырожденным: $\Lambda \overset{def}{=} |\Lambda^n_{ij}| \neq 0$, причем

$$d\ln\Lambda + m(\omega^0_0 + \omega^n_n) - 2\omega^k_k = \Lambda_k \omega^k_0, \quad \Lambda_k = \Lambda^{ji}_n \Lambda^n_{ijk}; \tag{5}$$

здесь Λ^{ij}_n – тензор I-го порядка, взаимный Λ^n_{ij}:

$$\nabla_d \Lambda^{ij}_n - \Lambda^{ij}_n\, \omega^0_0 = -\Lambda^{is}_n \Lambda^{tj}_n \Lambda^n_{stk}\, \omega^k_0. \tag{6}$$

Продолжая уравнения (4), (5), находим:

$$\begin{cases} \nabla_d \Lambda^n_{ijk} + 2\Lambda^n_{ijk}\omega^0_0 + \Lambda^n_{ij}\omega^0_k + \Lambda^n_{ik}\omega^0_j + \Lambda^n_{kj}\omega^0_i - \\ -(\Lambda^n_{ij}\Lambda^n_{sk} + \Lambda^n_{jk}\Lambda^n_{is} + \Lambda^n_{ik}\Lambda^n_{sj})\omega^s_n = \Lambda^n_{ijks}\omega^s_0, \\ 2\Lambda^n_{ij[ks]} = 2\Lambda^n_{ie} M^v_{j[k} N^e_{|v|s]} + 2\Lambda^n_{ej} M^v_{i[k} N^e_{|v|s]} + \Lambda^n_{ie} R^e_{jks} + \\ +\Lambda^n_{ej} R^e_{iks} - \Lambda^n_{ij}(R^0_{0ks} + R^n_{nks}) + \Lambda^n_{ije} R^e_{0ks}; \end{cases} \tag{7$_1$}$$

$$\begin{cases} \nabla_d \Lambda_k + \Lambda_k \omega^0_0 + (m+2)(\omega^0_k - \Lambda^n_{ek}\omega^e_n) = \Lambda_{ks}\omega^s_0, \\ 2\Lambda_{[ks]} = \Lambda_e R^e_{0ks} - m(R^0_{0ks} + R^n_{nks}) + 2R^e_{eks} - 4N^e_{v[k} M^v_{s]e}. \end{cases} \tag{7$_2$}$$

Согласно [1], [5], каждая из систем функций

$$\begin{cases} b^{ij}_{nv} \overset{def}{=} N^i_{vk}\Lambda^{kj}_n - a^0_v \Lambda^{ij}_n, \quad & c^v_{ij} \overset{def}{=} M^v_{ij} - a^v_n \Lambda^n_{ij}, \\ b^i_{vk} \overset{def}{=} b^{ij}_{nv}\Lambda^n_{jk}, & c^{vi}_{nk} \overset{def}{=} c^v_{sk}\Lambda^{is}_n \end{cases} \tag{8}$$

образует тензор; отметим, что квазитензоры a^v_n, a^0_v имеют строение:

$$a^v_n = \frac{1}{m} M^v_{ij}\Lambda^{ji}_n, \quad a^0_v = \frac{1}{m} N^i_{vi}. \tag{9}$$

Симметрические тензоры

$$b_{uv} \overset{def}{=} b^i_{uk} b^k_{vi}, \quad c^{uv}_{nn} \overset{def}{=} c^{ui}_{nk} c^{vk}_{ni}, \tag{IO}$$

вообще говоря, являются невырожденными (см. [5]). Не нарушая общности, можно считать, что произведение матриц $b = (b_{uv})$ и $c = (c^{uv}_{nn})$ коммутативно:

$$bc = cb, \tag{II}$$

ибо, например, за счет соответствующего выбора вершин A_v репера, расположенных в характеристике $\Pi_{n-m-1}(A_0)$, матрицу b всегда можно привести к диагональному виду.

Составим матричное уравнение

$$b^{-1}x = x^{-1}c. \tag{12}$$

Если матрица b -диагональная, то уравнение (12) эквивалентно матричному уравнению $x^2 = bc$. Согласно [7], последнее уравнение в общем случае имеет решение с некоторым произволом; возьмем одно из неособых решений $d = (d^v_{nu})$ (т.е. тензор d^v_{nu} невырожден):

$$b^{-1}d = d^{-1}c. \tag{13}$$

Компоненты тензора d^{nw}_v второго порядка, взаимного тензору d^v_{nu}, определяются соотношениями:

$$d^{nw}_v d^u_{nw} = d^{nu}_w d^w_{nv} = \delta^u_v.$$

Система функций

$$b^n_{uv} \overset{def}{=} d^{nw}_u b_{wv} \tag{14}$$

образует невырожденный тензор второго порядка (вообще говоря, несимметрический):

$$\begin{cases} \nabla_d b^n_{uv} + b^n_{uv}\omega^0_0 = b^n_{uvk}\omega^k_0; & \text{(a)}\\ B_0 \overset{def}{=} |b^n_{uv}| \neq 0, & \\ d\ln B_0 + (n-m-1)(\omega^0_0 + \omega^n_n) - 2\omega^v_v = B_k\omega^k_0, & \text{(б)}\\ B_k = b^{vu}_n b^n_{uvk}, \quad b^{vw}_n b^n_{wu} = \delta^v_u & \end{cases} \tag{15}$$

Продолжая уравнения (15-а), имеем:

$$\begin{cases} \nabla_d b^n_{uvk} + 2b^n_{uvk}\omega^0_0 + b^n_{uv}(\omega^0_k - \Lambda^n_{sk}\omega^s_n) = b^n_{uvks}\omega^s_0, \\ 2b^n_{uv[st]} = -2b^n_{wv}M^w_{\ell[s}N^\ell_{|u|t]} - 2b^n_{uw}M^w_{\ell[s}N^\ell_{|v|t]} + b^n_{u v \ell}R^\ell_{0st} + \\ + b^n_{wv}R^w_{ust} + b^n_{uw}R^w_{vst} - b^n_{uv}(R^0_{0st} + R^n_{nst}). \end{cases} \tag{16}$$

Согласно (1), (5), (15-б), ненулевой относительный инвариант второго порядка $\Phi \overset{def}{=} \Lambda \cdot B_0$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{cases} d\ln\Phi + (n+1)(\omega^0_0 + \omega^n_n) = \Phi_k\omega^k_0, \\ \Phi_k = \Lambda_k + B_k \end{cases} \tag{17}$$

Продолжая уравнение (17), находим

$$\begin{cases} \nabla_d \Phi_k + \Phi_k\omega^0_0 + (n+1)(\omega^0_k - \Lambda^n_{sk}\omega^s_n) = \Phi_{ks}\omega^s_0, \\ 2\Phi_{[ks]} = \Phi_t R^t_{0ks} - (n+1)(R^0_{0ks} + R^n_{nks}). \end{cases} \tag{18}$$

2. Задание гиперполосы $H_m \subset P_{n,n}$ индуцирует пространство проективной связности $P_{m,n}$ с m-мерной базой V_m (базисная поверхность гиперполосы) и n-мерными слоями P_n, ибо из уравнений (1) в силу $\omega^\alpha_0 = 0$ (см. (2)) имеем

$$\mathcal{D}\omega^{\bar{x}}_{\bar{y}} = \omega^{\bar{L}}_{\bar{y}} \wedge \omega^{\bar{x}}_{\bar{L}} + \frac{1}{2}R^{\bar{x}}_{\bar{y}st}\omega^s_0 \wedge \omega^t_0, \quad \omega^{\bar{L}}_{\bar{L}} = 0. \tag{19}$$

Здесь компоненты R^α_{0ij}, R^n_{vij} тензора кривизны-кручения $R^{\bar{x}}_{\bar{y}st}$ определены соотношениями (3), и его компоненты R^i_{jst}, R^u_{vst}, R^n_{ist}, R^i_{0st}, R^0_{0st}, R^n_{nst} с компонентами геометрических объектов второго, третьего и четвертого порядков гиперполосы связаны конечными соотношениями (4), (7), (16), (18).

Возьмем новые формы Пфаффа $\bar{\omega}^{\bar{x}}_{\bar{y}}$:

$$\begin{cases} \bar{\omega}^n_0 = \omega^n_0 = 0, \ \bar{\omega}^v_0 = \omega^v_0 = 0, \ \bar{\omega}^n_v = \omega^n_v = 0, \ \bar{\omega}^i_0 = \omega^i_0, \\ \bar{\omega}^0_0 = \omega^0_0 - \frac{\Phi_k}{n+1}\omega^k_0, \quad \bar{\omega}^n_n = \omega^n_n - \frac{\Phi_k}{n+1}\omega^k_0, \\ \bar{\omega}^0_n = \omega^0_n, \ \bar{\omega}^i_n = -\Lambda^{ik}_n\omega^0_k, \ \bar{\omega}^0_i = \Lambda^n_{ki}\omega^k_n, \\ \bar{\omega}^j_i = \omega^j_i + (\Lambda^{jk}_n\Lambda^n_{kis} - \delta^j_i\frac{\Phi_s}{n+1})\omega^s_0, \\ \bar{\omega}^n_i = -\Lambda^n_{ki}\omega^k_0, \ \bar{\omega}^v_i = -\Lambda^n_{ki}b^{vu}_n\omega^k_u, \ \bar{\omega}^v_n = -b^{vu}_n\omega^0_u, \\ \bar{\omega}^0_v = b^n_{uv}\omega^u_n, \ \bar{\omega}^i_v = -b^n_{uv}\Lambda^{ik}_n\omega^u_k, \\ \bar{\omega}^w_v = \omega^w_v + (b^{wu}_n b^n_{uvs} - \delta^w_v\frac{\Phi_s}{n+1})\omega^s_0. \end{cases} \tag{20}$$

В силу (2)-(7), (15)-(19) система форм $\{\bar{\omega}^{\bar{x}}_{\bar{y}}\}$ удовлетворяет структурным уравнениям пространства проективной связности $\bar{P}_{m,n}$:

$$\mathcal{D}\bar{\omega}^{\bar{x}}_{\bar{y}} = \bar{\omega}^{\bar{L}}_{\bar{y}} \wedge \omega^{\bar{x}}_{\bar{L}} + \frac{1}{2}\bar{R}^{\bar{x}}_{\bar{y}st}\omega^s_0 \wedge \omega^t_0, \quad \bar{\omega}^{\bar{L}}_{\bar{L}} = 0,$$

где

$$
\begin{aligned}
&\bar{R}^{i}_{ost}=\Lambda^{ik}_{n}R^{n}_{kst}, \quad \bar{R}^{o}_{ost}=-R^{n}_{nst}, \quad \bar{R}^{n}_{nst}=-R^{o}_{ost},\\
&\bar{R}^{n}_{ist}=-\Lambda^{n}_{ki}R^{k}_{ost}, \quad \bar{R}^{n}_{ost}=R^{n}_{ost}=-2\Lambda^{n}_{[st]},\\
&\bar{R}^{u}_{ost}=b^{uw}_{n}R^{n}_{wst}, \quad \bar{R}^{n}_{ost}=R^{n}_{ost}, \quad \bar{R}^{o}_{nst}=R^{o}_{nst},\\
&\bar{R}^{i}_{nst}=-\Lambda^{ik}_{n}R^{o}_{kst}, \quad \bar{R}^{u}_{nst}=-b^{uw}_{n}R^{o}_{wst}, \quad \bar{R}^{o}_{ist}=\Lambda^{n}_{ki}R^{k}_{nst},\\
&\bar{R}^{j}_{ist}=-\Lambda^{jl}_{n}\Lambda^{n}_{ki}R^{k}_{lst}, \quad \bar{R}^{u}_{vst}=-b^{uw}_{n}b^{n}_{zv}R^{z}_{wst}, \quad \bar{R}^{o}_{vst}=b^{n}_{uv}R^{u}_{nst},\\
&\bar{R}^{o}_{nst}=R^{o}_{nst}, \quad \bar{R}^{v}_{ist}=-\Lambda^{n}_{ki}b^{vu}_{n}R^{k}_{ust}, \quad \bar{R}^{i}_{vst}=-b^{n}_{uv}\Lambda^{ik}_{n}R^{u}_{kst},\\
&\qquad\qquad \bar{R}^{v}_{ost}=b^{vu}_{n}R^{n}_{ust}, \quad \bar{R}^{n}_{vst}=-b^{n}_{uv}R^{u}_{ost}.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Преобразование $\mathcal{J}$ форм проективной связности по закону (20) является инволютивным, т.е. $\mathcal{J}\equiv\mathcal{J}^{-1}$ (доказывается по схеме [6],[8]).

Из соотношений (21) следует, что $\{R^{\bar{\varkappa}}_{\bar{\jmath}st}\equiv 0\}\Leftrightarrow\{\bar{R}^{\bar{\varkappa}}_{\bar{\jmath}st}\equiv 0\}$, то есть пространства $P_{m,n}$ и $\bar{P}_{m,n}$ могут быть плоскими лишь одновременно; при этом формы $\omega^{\bar{\varkappa}}_{\bar{\jmath}}$ являются формами инфинитезимального перемещения точечного репера первого порядка $\{A_{\bar{\jmath}}\}$, а формы $\bar{\omega}^{\bar{\varkappa}}_{\bar{\jmath}}$ -формами инфинитезимального перемещения тангенциального репера $\{\xi_{\bar{\jmath}}\}$ (строение гиперплоскостей $\xi_{\bar{\jmath}}$ см. в [2], где вместо тензора A^{n}_{uv} следует взять тензор b^{n}_{uv}).

Образ $\bar{H}_m$, двойственный гиперполосе $H_m\subset P_{n,n}$, относительно тангенциального репера $\{\xi_{\bar{\jmath}}\}$ имеет уравнения вида (2):

$$
\begin{cases}
\bar{\omega}^{n}_{o}=\bar{\omega}^{v}_{o}=\bar{\omega}^{n}_{v}=0, & \bar{\omega}^{n}_{i}=\bar{\Lambda}^{n}_{ij}\bar{\omega}^{j}_{o},\\
\bar{\omega}^{v}_{i}=\bar{M}^{v}_{ij}\bar{\omega}^{j}_{o}, & \bar{\omega}^{i}_{v}=\bar{N}^{i}_{vj}\bar{\omega}^{j}_{o},
\end{cases} \tag{22}
$$

где

$$
\bar{\Lambda}^{n}_{ij}=-\Lambda^{n}_{ji}, \quad \bar{M}^{v}_{ij}=-\Lambda^{n}_{ki}b^{vu}_{n}N^{k}_{uj}, \quad \bar{N}^{i}_{vj}=-b^{n}_{uv}\Lambda^{ik}_{n}M^{u}_{kj}.
$$

Доказана теорема: регулярная гиперполоса $H_m\subset P_{n,n}$ индуцирует два двойственные между собой пространства проективной связности $P_{m,n}$ и $\bar{P}_{m,n}$ (относительно инволютивного преобразования форм связности по закону (20)) и двойственный образ $\bar{H}_m$,

определяемый уравнениями (22); тензоры кривизны-кручения пространств $P_{m,n}$ и $\bar{P}_{m,n}$ связаны соотношениями (21).

Полученный результат открывает пути построения двойственной теории многообразия $H_m\subset P_{n,n}$; некоторые вопросы этой теории автором изучались в работах [6],[8] -[10].

Библиографический список

1.С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1975.Т.7. С.117-151.

2.С т о л я р о в А.В. Двойственная теория гиперполосного распределения и ее приложения//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1982. Вып.13.С.95-102.

3.Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии//Тр.геометр.семинара/ ВИНИТИ.М.,1966.Т.1.С.139-189.

4. Cartan E. Leçons sur la théorie des éspaces á connexion projective. Paris, 1937.

5.С т о л я р о в А.В. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы// Изв.вузов.Матем.1975.№10.С.97-99.

6.С т о л я р о в А.В. Дифференциальная геометрия полос// Проблемы геометрии/ ВИНИТИ.М.,1978.Т.10.С.25-54.

7.Г а н т м а х е р Ф.Р. Теория матриц.М.:Наука,1967.576с.

8.С т о л я р о в А.В. Двойственные линейные связности на оснащенных многообразиях пространства проективной связности// Проблемы геометрии/ ВИНИТИ.М.,1977.Т.8.С.25-46.

9.С т о л я р о в А.В. Условие квадратичности регулярной гиперполосы// Изв.вузов.Матем.1975. № 11.С.106-108.

10.С т о л я р о в А.В. Двойственные нормальные связности на регулярной гиперполосе// Изв.вузов.Матем.1985.№ 9.С.72-75.