5. Столяров А.В. Двойственная теория регулярного распределения гиперплоскостных элементов в пространстве проективной связности. I; II // Известия вузов. Математика. 1980. № 1. С.79-82. 1980. № 2. С.84-87.

6. Столяров А.В. Двойственная теория гиперполосного распределения и ее приложения // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. тематич. сб. научн. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1982. Вып.13. С.95-102.

7. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.

8. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. об-ва. 1953. № 2. С.275-382.

9. Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева / Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.7-70.

10. Лаптев Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда, 1961. Л.: Наука, 1964. Т.2. С.225-233.

11. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.49-94.

12. Остиану Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.71-120.

13. Попов Ю.И. О специальных классах трехсоставных распределений проективного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1989. Деп. в ВИНИТИ 13.12.89. № 7402 - В89 Деп.

14. Попов Ю.И. О двойственных проективных связностях регулярного трехсоставного распределения / Калинингр. ун-т. Калининград, 1983. Деп. в ВИНИТИ 23.06.83. № 3430 - 83 Деп.

УДК 514.75

ПАРЫ Т КОНГРУЭНЦИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ПРЯМЫЕ КОТОРЫХ ПРОХОДЯТ ЧЕРЕЗ ФОКУСЫ ПРЯМЫХ КОНГРУЭНЦИИ ОБЩИХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРОВ

О.С. Редозубова

(Московский государственный педагогический университет)

В евклидовом трехмерном пространстве рассмотрены пары Т конгруэнций $\{\tau_a\}$ $(a=1,2)$ с постоянным расстоянием и постоянным углом между соответствующими прямыми $(\tilde{T})$, соответствующие прямые которых проходят через фокусы прямых конгруэнции $\{\tau\}$ общих перпендикуляров (T_0). Такие пары обозначим буквой $\tilde{T}_0$. Найдены некоторые характеристические свойства таких пар.

К паре Т конгруэнций $\{\tau_a\}$, фокусы которых F_a и F'_a, присоединен подвижный ортонормированный репер $R=(O,\vec{e}_i)$ $(i=1,2,3)$, где $O\in\tau$, $\vec{e}_3 \parallel \tau$. Направляющие векторы прямых τ_a есть векторы

$$\vec{\eta}_a=\vec{e}_1\cos\alpha_a+\vec{e}_2\sin\alpha_a,$$

где α_a -углы, образуемые вектором $\vec{e}_1$ с векторами $\vec{\eta}_a$. По отношению к реперу $(O,\vec{e}_3)$ точки $K_a=\tau\cap\tau_a$ имеют координаты h_a, так что расстояние между соответствующими прямыми равно $|h_1-h_2|$. Относительно реперов $(K_a,\vec{\eta}_a)$ фокусы прямых τ_a F_a и F'_a имеют координаты ρ_a и ρ'_a. Угол между фокальными плоскостями Π_a конгруэнции $\{\tau\}$ общих перпендикуляров равен 2φ, расстояние между фокусами равно 2ξ. Компоненты инфинитезимальных преобразований репера R удовлетворяют условиям:

$$d\vec{O}=\omega^i\vec{e}_i,\quad d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j \qquad (i,j=1,2,3).$$

Известно, что пары Т конгруэнций могут быть общими (при условии $\rho'_1\rho_2-\rho_1\rho'_2\neq 0$) и специальными (при условии $\rho'_1\rho_2=\rho_1\rho'_2$). Условия, определяющие пары Т конгруэнций, в общем случае определяются системой уравнений (3) в [1, с.3], в специальном случае - системой уравнений (8) в [1, с.5].

Рассмотрим пары Т конгруэнций с постоянным расстоянием и постоянным углом между соответствующими прямыми. Такие пары $\tilde{T}$ конгруэнций существуют с произволом четырех функций одного аргумента в общем случае и определяются системой уравнений (28) в [1, с.18]:

$$\begin{cases} A_1 = A_2 \equiv A,\ H_1 = H_2 \equiv H,\ A = \alpha \Omega_{13} + \beta \Omega_{23},\ H = -\beta \Omega_{13} - \alpha \Omega_{23}, \\ Q_1 = \lambda \Omega_{13} - \mu \Omega_{23},\quad Q_2 = \mu \Omega_{13} + \lambda \Omega_{23}. \end{cases} \tag{I}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{cases} \Omega_a = \omega^1 \cos\alpha_a + \omega^2 \sin\alpha_a,\ \Omega^*_a = \omega^1 \sin\alpha_a - \omega^2 \cos\alpha_a, \\ \Omega^*_{a3} = -\omega^3_1 \sin\alpha_a + \omega^3_2 \cos\alpha_a,\ \Omega_{a3} = \omega^3_1 \cos\alpha_a + \omega^3_2 \sin\alpha_a, \\ A_0 = \dfrac{\omega^2_1 + d\alpha_a}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)},\ H_a = \dfrac{\omega^3 + dh_a}{h_1 - h_2},\ Q_a = \dfrac{\Omega^*_a + h_a \Omega^*_{a3}}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}; \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{g r_1}{S(h_1 - h_2)},\ \beta = -\dfrac{g r_2}{S(h_1 - h_2)},\ g = \rho_1\rho_2 - \rho_1'\rho_2',\ r_a = \rho_a - \rho_a'\ (a=1,2), \\ \lambda = \dfrac{f r_1 r_2}{S(h_1 - h_2)},\ \mu = \dfrac{fg}{S(h_1 - h_2)},\ f = \rho_1\rho_1' - \rho_2\rho_2',\ S = r_1^2 - r_2^2 \neq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Рассмотрим такие пары $\widehat{T}$ конгруэнций, соответствующие пр мые которых проходят через фокусы прямых r конгруэнции общ перпендикуляров. Тогда фокусами конгруэнции $\{r\}$ являются то ки $K_a\ (a=1,2)$. Пары $\widehat{T}_0$ конгруэнций определяются в общем слу системой уравнений (I) и уравнением $|h_1 - h_2| = 2\hat{\rho}$.

Т е о р е м а I. Пара $\widehat{T}_0$ конгруэнций в общем случае об разована конгруэнциями нормалей фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров тогда и только тогда, когда ра ны между собой произведения абсцисс фокусов $\rho_a\rho_a'$. При этом это произведение постоянно, а конгруэнция общих перпендикуля ров – псевдосферическая.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если пара T конгруэнций об разована нормалями фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров, то она есть пара T_0, и, как показано в работ [I, с.2I, 22], эти пары имеют постоянное расстояние и посто янный угол между соответствующими прямыми, причем $\rho_1\rho_1' = \rho_2\rho_2'$.

Пусть у пары $\widehat{T}_0$ конгруэнций $\rho_1\rho_1' = \rho_2\rho_2'$. Тогда в систем уравнений (I), (3) $\lambda = 0$. Отнесем конфигурацию к трехгранни ку Гишара R_0 (0 – центр прямой конгруэнции общих перпенди куляров, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ – параллельны биссекторным плоскостям фокал ных плоскостей конгруэнции общих перпендикуляров). Тогда в со ответствии с [2, с.73] имеем условия:

$$\omega^1 = -\hat{\rho}\,\mathrm{ctg}\,\varphi \cdot \omega^3_2,\quad \omega^2 = -\hat{\rho}\,\mathrm{tg}\,\varphi \cdot \omega^3_1. \tag{4}$$

Подставляя эти выражения в последние два уравнения системы уравнений (I), получим после некоторых преобразований:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 \equiv \alpha,\ \lambda = \dfrac{1}{\sin 2\alpha}(h\,\mathrm{ctg}\,2\alpha - \hat{\rho}\,\mathrm{ctg}\,2\varphi), \\ h_1 = -h_2 \equiv h,\ \mu = \dfrac{1}{\sin 2\alpha}\left(\dfrac{\hat{\rho}}{\sin 2\varphi} - \dfrac{h}{\sin 2\alpha}\right) \neq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Учитывая условие того, что соответствующие прямые r_a проходят через фокусы K_a конгруэнции $\{r\}$: $2\hat{\rho} = 2h$ и $\lambda = 0$, получим, что $\alpha = \varphi - \frac{\pi}{2}$, т.е. прямые r_a являются нормалями фокальных поверхностей (K_a) конгруэнции $\{r\}$.

Заметим, что из равенств $\mathrm{ctg}\,2\varphi = \mathrm{ctg}\,2\alpha$ и $2\hat{\rho} = 2\varphi$ следует постоянство $2\hat{\rho}$ и 2φ. Следовательно, конгруэнция $\{r\}$ – псевдосферическая. Из условий нормальности конгруэнций $\{r_a\}$ следует, что

$$(h_1 - h_2)^2 + \rho_a\rho_a' \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \quad (a = 1,2), \tag{6}$$

откуда видно, что $\rho_a\rho_a' = \mathrm{const}$.

Т е о р е м а 2. Пара $\widehat{T}$ конгруэнций в общем случае образована нормалями фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров тогда и только тогда, когда равны между собой и постоянны произведения $\rho_a\rho_a'$ $(a = 1,2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если пара T конгруэнций $\{r_a\}$ образована нормалями фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров, то из [1, с.22]: $\rho_1\rho_1' = \rho_2\rho_2' = \mathrm{const}$.

Пусть имеем пару $\widehat{T}$ конгруэнций /общий случай/, у которой $\rho_1\rho_1' = \rho_2\rho_2' = \mathrm{const}$. Дифференцируя систему уравнений (1) внешним образом, из последних двух квадратичных уравнений можно получить условие (6), из которого следует, что конгруэнции $\{r_a\}$ – нормальные. Можно доказать, что в данном случае $\mu = \rho_1\rho_1' \cdot \frac{1}{h_1 - h_2}$. Используя условия (5) и (6), получим, что $\cos 2\varphi = -\cos 2\alpha$, откуда имеем: а) $\alpha = -\varphi + \frac{\pi}{2}$ и б) $\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}$. Но в соответствии с теоремой 9 [1, с.10] в случае а), когда соответствующие прямые пары параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции $\{r\}$, эти пары являются специальными. Следовательно, остается только случай б). Тогда $\mathrm{ctg}\,2\alpha = \mathrm{ctg}\,2\varphi$, и, следовательно, из уравнений (5) при $\lambda = 0$ имеем $2\hat{\rho} = 2h$. Значит, соответствующие прямые пары являются нормалями фокальных поверхностей конгруэнции $\{r\}$ общих перпендикуляров.

Можно доказать, что пары существуют с произволом двух функций одного аргумента, что развертывающиеся поверхности таких пар прямо соответствуют.

Рассмотрим, в частности, случай, когда $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Такие пары названы ортогональными.

Т е о р е м а 3. У ортогональной пары T конгруэнций со-ответствующие конгруэнции являются нормальными тогда и только тогда, когда $\rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2'=const$ и расстояние между соответствующими прямыми постоянно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если у ортогональной пары T конгруэнций обе конгруэнции нормальные, то из условий (6) следует, что $\rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2'=-(h_1-h_2)^2$. По теореме 28 [1, с.31] ортогональные пары нормальных конгруэнций имеют постоянное расстояние между соответствующими прямыми. Следовательно, постоянно и произведение $\rho_a\rho_a'$.

Обратно, пусть у ортогональной пары T конгруэнций постоянно расстояние между соответствующими прямыми и выполняется условие $\rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2'=const$. Тогда по теореме 2 конгруэнции пары - нормальные.

Т е о р е м а 4. Ортогональная пара T нормальных конгруэнций есть расслояемая пара, в число расслояющих поверхностей которой входят фокальные поверхности конгруэнции общих перпендикуляров.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 28 [1, с.31] ортогональная пара T нормальных конгруэнций есть пара $\tilde T$, конгруэнции пары есть конгруэнции нормалей фокальных поверхностей (K_a) некоторой нормальной псевдосферической конгруэнции. По теореме 27 [1, с.30] к конгруэнции нормалей произвольной псевдосферической поверхности (K_1) (фокальной поверхности конгруэнции $\{\tau\}$) можно присоединить с произволом одной постоянной прямые другой нормальной конгруэнции, образующей с первой ортогональную пару T так, чтобы эти прямые лежали в касательных плоскостях этой поверхности. Аналогично расположение прямых первой конгруэнции относительно второй фокальной поверхности (K_2). Таким образом, соответствующие прямые лежат перекрестно в фокальных плоскостях конгруэнции общих перпендикуляров. Следовательно, по теореме 8 [1, с.9] ортогональная пара T нормальных конгруэнций есть расслояемая пара, в число расслояющих поверхностей которой входят фокальные поверхности конгруэнции $\{\tau\}$ общих перпендикуляров.

Т е о р е м а 5. Пары $\tilde T$ конгруэнций специального вида являются парами T_0 тогда и только тогда, когда соответствующие прямые параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если пара $\tilde T$ конгруэнций специального вида, то по теореме 23 [1, с.24] конгруэнция общих перпендикуляров $\{\tau\}$ - псевдосферическая и $\rho_1\rho_2'=const$. Пары определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} A=\alpha\Omega_{13}+\beta_0\Omega_{23}, \quad H=-\beta_0\Omega_{13}-\alpha_0\Omega_{23}, \; \rho_2=t\rho_1, \; \rho_2'=t\rho_1', \\ Q_1=\Omega_{13}\dfrac{t\rho_1\rho_1'}{h_1-h_2}, \quad Q_2=\Omega_{23}\dfrac{t\rho_1\rho_1'}{h_1-h_2} \quad (t^2\neq 1,\ t\neq 0), \\ \alpha_0=\dfrac{t(\rho_1+\rho_1')}{h_1-h_2}, \quad \beta_0=-t\alpha_0 . \end{cases} \tag{7}$$

Если рассматриваемые пары конгруэнций есть пары T_0, то по теореме 9 [1, с.10] либо $\tau_a\subset\Pi_a$, либо соответствующие прямые параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции $\{\tau\}$. Предположим, что $\tau_a\subset\Pi_a$. Тогда $\rho_1'=\rho_2'=0$. Из первых двух уравнений системы (7) $Q_a=0$. Из квадратичных уравнений системы (7) при условии $\rho_1'=\rho_2'=0$ имеем $\rho_1\rho_2=0$. Тогда $\rho_1=0$ (или $\rho_2=0$). Ни то, ни другое невозможно. Итак, у рассматриваемой пары конгруэнций соответствующие прямые параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров.

Допустим, что у специальной пары конгруэнций (пары $\tilde T$) соответствующие прямые параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции $\{\tau\}$. Тогда относительно репера R_0, используя первые два уравнения системы (7), можно получить условия (39) [1, с.25]:

$$\begin{cases} \alpha_1=-\alpha_2\equiv\alpha, \quad h_1=-h_2\equiv h, \\ 2\rho\sin 2\alpha=2h\sin 2\varphi. \end{cases} \tag{8}$$

Если потребовать, чтобы $\alpha=-\varphi+\frac{\pi}{2}$, то $\sin 2\alpha=\sin 2\varphi$ и из (8) получим, что $2\rho=2h$, т.е. пары конгруэнций есть пары T_0.

Библиографический список

1. Р е д о з у б о в а О.С. Основы метрической теории пар T конгруэнций / МГПИ им. В.И.Ленина. М., 1980. Деп. ВИНИТИ. 1980. №2993.

2. Ф и н и к о в С.П. Теория конгруэнций. М.; Л., 1950.

11 Зак. 1399