Литература

1. Овчинников В.М., Дифференцируемое отображение поверхности в многообразие квадратичных элементов. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.2, (Труды Калининградского ун-та), 1971, 38-42.

2. Малаховский В.С., Многообразия алгебраических элементов в - мерном проективном пространстве. "Геом.сборник", вып.3.(Труды Томского ун-та), т.168, 1963, 28-42.

3. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия оснащенных многообразий фигур. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", (Труды Калининградского ун-та), вып.2, 1971, с.5-19.

4. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия многообразий фигур. (Труды Московского математического общества), ГИТТЛ, М., 1953, т.2, с.275-383.

5. Ивлев Е.Т., К геометрии интерпретации операции свертывания некоторых тензоров. "Материалы итоговой научной конф.по математике и механике за 1970г."(Из-во Томского ун-та), ч.I, 1971, с.121-123.

6. Норден А.П., Пространства аффинной связности, М-Л, 1950.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3 1973

Ю.И.ПОПОВ

ТЕОРИЯ ОСНАЩЕННЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ГИПЕРПОЛОС С АССОЦИИРОВАННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ МНОГОМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА.

В n-мерном проективном пространстве P_n изучаются оснащенные регулярные m-мерные гиперполосы Γ_m $(n>m)$ с ассоциированной связностью. Найдены дифференциальные уравнения гиперполосы и условия их интегрируемости. Доказаны теоремы о возможности погружения базисной поверхности B_m гиперполосы Γ_m в подпространство $P_{n'}$ пространства P_n. Естественным образом определена связность гиперполосы, порожденная её оснащением.

§ I. Оснащенная регулярная гиперполоса с ассоциированной связностью.

С оснащенной гиперполосой $H(\Gamma_m)$ естественным образом ассоциируется четырехсоставное многообразие $X_{n(m)}$, базой которого служит базисная поверхность B_m гиперполосы Γ_m, а локальными многообразиями являются центроаффинные пространства $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_0, \mathcal{X}_{n-m-1}, A_{n+1}$. Допустимыми преобразованиями координатных систем в локальных многообразиях $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_0, \mathcal{X}_{n-m-1}, A_{n+1}$

будем считать соответственно следующие преобразования:

$$\xi^{1'} = \psi_1^{1'}(x^i)\xi^1, \qquad \psi_1^{1'} = \psi_1^{1'}(x^i) \neq 0. \tag{1.1}$$

$$\eta^{0'} = \varphi_0^{0'}(x^i)\eta^0, \qquad \varphi_0^{0'} = \varphi_0^{0'}(x^i) \neq 0. \tag{1.2}$$

$$\theta^{\sigma'} = \chi_\lambda^{\sigma'}(x^i)\,\theta^\lambda, \qquad \det\|\chi_\lambda^{\sigma'}(x^i)\| \neq 0. \tag{1.3}$$

$$y^{\alpha'} = a_\alpha^{\alpha'}(x^i)\,y^\alpha, \qquad \det\|a_\alpha^{\alpha'}(x^i)\| \neq 0.^{*)} \tag{1.4}$$

Здесь $x^1, x^2, \ldots, x^m$ -координаты точки M базисного многообразия B_m, а $\psi_1^{1'}(x^i), \varphi_0^{0'}(x^i), \chi_\lambda^{\sigma'}(x^i), a_\alpha^{\alpha'}(x^i)$ — -произвольные непрерывные функции, дифференцируемые достаточное число раз.

Каждая оснащенная гиперполоса $N(\Gamma_m)$ индуцирует в составном многообразии $X_{n(m)}$ объект связности Π_i, состоящий из псевдосвязностей

$$\Pi_{\beta i}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}\frac{\partial M^\gamma}{\partial x^i} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} M_{,i}^{\gamma} \tag{1.5}$$

$$\Pi_{1i}^{1} = M_{1,i}^{\alpha} P_\alpha^1 + \Pi_{\beta i}^{\alpha} M_1^\beta P_\alpha^1 = M_{1;i}^{\alpha} P_\alpha^1 = -M_1^\alpha P_{\alpha;i}^1, \tag{1.6}$$

$$\Pi_{0i}^{0} = X_{0,i}^{\alpha} T_\alpha^0 + \Pi_{\beta i}^{\alpha} X_0^\beta T_\alpha^0 = X_{0;i}^{\alpha} T_\alpha^0 = -X_0^\alpha T_{\alpha;i}^0. \tag{1.7}$$

$$\Pi_{\lambda i}^{\sigma} = X_{\lambda,i}^{\alpha} T_\alpha^\sigma + \Pi_{\beta i}^{\alpha} X_\lambda^\beta T_\alpha^\sigma = X_{\lambda;i}^{\alpha} T_\alpha^\sigma = -X_\lambda^\alpha T_{\alpha;i}^\sigma, \tag{1.8}$$

соответствующих локальным многообразиям $A_{n+1}, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_0, \mathcal{X}_{n-m-1}$ и аффинной связности базисного пространства

$$\Pi_{ij}^{k} = M_{1;ij}^{\alpha} N_\alpha^{1k} - 2M_{1;(i}^{\alpha}\delta_{j)}^{k} P_\alpha^1. \tag{1.9}$$

---

*) В работе употребляется следующая схема использования индексов: $i, j, k, \ell \ldots = 1, 2, \ldots, m;$ $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n+1;$ $\lambda, \varkappa, \sigma, \pi = 1, 2, \ldots, n-m-1$

где $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ -связность локального многообразия A_{n+1}, а символ ";" обозначает ковариантное дифференцирование тензоров составного многообразия $X_{n(m)}$ относительно связности $\Pi_{\beta i}^{\alpha}$.

Оснащенную гиперполосу $N(\Gamma_m)$, с которой ассоциируется четырехсоставное многообразие $X_{n(m)}$, назовем гиперполосой с ассоциированной связностью (компоненты $\Pi_{\beta i}^{\alpha}$ не равны тождественно нулю) и будем обозначать через $X(\Gamma_m)$.

Связность Π_i индуцирует в составном многообразии $X_{n(m)}$ тензоры

$$R_{ijk}^{h} = -\Pi_{i\underline{j};\underline{k}}^{h} - \Pi_{i\underline{j}}^{s}\Pi_{s\underline{k}}^{h}, \quad R_{0jk}^{0} = -\Pi_{0\underline{j};\underline{k}}^{0},$$

$$R_{\lambda ij}^{\sigma} = -\Pi_{\lambda\underline{j};\underline{k}}^{\sigma} - \Pi_{\lambda\underline{j}}^{\varkappa}\Pi_{\varkappa\underline{k}}^{\sigma}, \quad R_{1jk}^{1} = -\Pi_{1\underline{j};\underline{k}}^{1}, \tag{1.10}$$

$$R_{\beta ij}^{\alpha} = -\Pi_{\beta\underline{j};\underline{k}}^{\alpha} - \Pi_{\beta\underline{j}}^{\gamma}\Pi_{\gamma\underline{k}}^{\alpha},^{*)}$$

которые называются тензорами кривизны, соответствующими пространствам $B_m, \mathcal{X}_0, \mathcal{X}_{n-m-1}, \mathcal{X}_1, A_{n+1}$. Пользуясь связностью Π_i, можно дифференцировать тензоры составного многообразия $X_{n(m)}$. Для ковариантного дифференцирования относительно связности Π_i имеют место обобщенные тождества Риччи. Например, для тензора $A_{\lambda 1 i}^{\alpha 0}$ эти тождества имеют вид:

$$A_{\lambda 1 i|jk}^{\alpha 0} = R_{\lambda jk}^{\sigma} A_{\sigma 1 i}^{\alpha 0} + R_{1jk}^{1} A_{\lambda 1 i}^{\alpha 0} + R_{ijk}^{h} A_{\lambda 1 h}^{\alpha 0} - R_{\beta jk}^{\alpha} A_{\lambda 1 i}^{\beta 0} - R_{0jk}^{0} A_{\lambda 1 i}^{\alpha 0}. \tag{1.11}$$

Тензоры кривизны (I.10) обладают следующими свойствами:

---

*) См.[3], стр.105.

$$R^{h}_{ijk}+R^{h}_{kij}+R^{h}_{jki}=0,\qquad R^{h}_{ijk|s}+R^{h}_{iks|j}+R^{h}_{isj|k}=0,$$

$$R^{o}_{oij|k}+R^{o}_{ojk|i}+R^{o}_{oki|j}=0,\quad R^{1}_{1ij|k}+R^{1}_{1jk|i}+R^{1}_{1ki|j}=0, \tag{1.12}$$

$$R^{\pi}_{\lambda ij|k}+R^{\pi}_{\lambda jk|i}+R^{\pi}_{\lambda ki|j}=0,\quad R^{\alpha}_{\beta ij|k}+R^{\alpha}_{\beta jk|i}+R^{\alpha}_{\beta ki|j}=0.$$

Условия интегрируемости уравнений $a^{\alpha o}_{\lambda 1i|j}=b^{\alpha o}_{\lambda 1ij}$ имеют такой же вид, как и при обычном ковариантном дифференцировании

$$a^{\alpha o}_{\lambda 1i|[j k]}=b^{\alpha o}_{\lambda 1i[j|k]}. \tag{1.13}$$

С каждой точкой M^{α}_{1} базисной поверхности B_m гиперполосы $X(\Gamma_m)$ связываем контравариантный репер $M^{\alpha}_{1}, X^{\alpha}_{o}, M^{\alpha}_{1|i}, X^{\alpha}_{\sigma}$ и взаимный ему ковариантный репер $P^{1}_{\alpha}, T^{o}_{\alpha}, N^{1h}_{\alpha}, T^{\lambda}_{\alpha}$:

	P^{1}_{α}	T^{o}_{α}	N^{1h}_{α}	T^{λ}_{α}
M^{α}_{1}	1	0	0	0
X^{α}_{o}	0	1	0	0
$M^{\alpha}_{1\|i}$	0	0	δ^{h}_{i}	0
X^{α}_{σ}	0	0	0	$\delta^{\lambda}_{\sigma}$

(1.14)

Нормаль I-го рода в данной точке M^{α}_{1} гиперполосы $X(\Gamma_m)$ определяется тензорами $X^{\alpha}_{o}, X^{\alpha}_{\lambda}$, а нормаль второго рода тензором

$$M^{\alpha}_{1|i}=M^{\alpha}_{1,i}+\Pi^{\alpha}_{\beta i}M^{\beta}_{1}-\Pi^{1}_{1i}M^{\alpha}_{1}=M^{\alpha}_{1;i}-\Pi^{1}_{1i}M^{\alpha}_{1}.$$

§ 2. Основные уравнения гиперполосы $X(\Gamma_m)$ и условия их интегрируемости.

Учитывая (I.5)-(I.9),(I.I4), по аналогии с §3 работы [I], получаем:

$$M^{\alpha}_{1|ij}=p_{ij}M^{\alpha}_{1}+b^{o}_{1ij}X^{\alpha}_{o}+b^{\lambda}_{1ij}X^{\alpha}_{\lambda}, \tag{2.1}$$

$$X^{\alpha}_{o|i}=m^{1}_{oi}M^{\alpha}_{1}+n^{\lambda}_{oi}X^{\alpha}_{\lambda}+m^{1h}_{oi}M^{\alpha}_{1|h}, \tag{2.2}$$

$$X^{\alpha}_{\lambda|i}=m^{1}_{\lambda i}M^{\alpha}_{1}+m^{1h}_{\lambda i}M^{\alpha}_{1|h}. \tag{2.3}$$

Эти уравнения называются основными дифференциальными уравнениями оснащенной регулярной гиперполосы $X(\Gamma_m)$ с ассоциированной связностью, а тензоры $p_{ij}, b^{o}_{1ij}, b^{\lambda}_{1ij}, m^{1}_{oi}, n^{\lambda}_{oi}, m^{1h}_{oi}, m^{1}_{\lambda i}, m^{1h}_{\lambda i}$ – основными тензорами гиперполосы $X(\Gamma_m)$.

Тензор

$$b^{o}_{1ij}=-M^{\alpha}_{1;i}T^{o}_{\alpha;j}=-M^{\alpha}_{1|i}T^{o}_{\alpha|j}=M^{\alpha}_{1|ij}T^{o}_{\alpha} \tag{2.4}$$

называется главным фундаментальным тензором регулярной гиперполосы $X(\Gamma_m)$, причем $r=\operatorname{rang}\|b^{o}_{1ij}\|=m$.

Условия интегрируемости основных дифференциальных уравнений (2.I)-(2.3) имеют следующий вид:

$$R^{\alpha}_{\beta ij}=0,\ (\alpha\neq\beta), \tag{2.5'}$$

$$R^{1}_{1ij}-R^{\alpha}_{\alpha ij}=p_{[ij]}. \tag{2.5}$$

(по α не суммировать)

$$b^{0}_{1\underline{i}\underline{j}} = 0, \tag{2.6}$$

$$b^{\lambda}_{1\underline{i}\underline{j}} = 0, \tag{2.7}$$

$$R^{h}_{ijk} + \delta^{h}_{i} R^{1}_{1jk} - \delta^{1}_{i} R^{\alpha}_{\alpha jk} = p_{i\underline{j}} \delta^{h}_{\underline{k}} + b^{0}_{1i\underline{j}} m^{1h}_{0\underline{k}} + b^{\lambda}_{1i\underline{j}} m^{1h}_{\lambda\underline{k}}\ , \tag{2.8}$$

$$b^{0}_{1i\underline{j}|\underline{k}} = 0, \tag{2.9}$$

$$b^{\lambda}_{1i\underline{j}|\underline{k}} + b^{0}_{1i\underline{j}} n^{\lambda}_{0\underline{k}} = 0, \tag{2.10}$$

$$p_{i\underline{j}|\underline{k}} + b^{0}_{1i\underline{j}} m^{1}_{0\underline{k}} + b^{\lambda}_{1i\underline{j}} m^{1}_{\lambda\underline{k}} = 0, \tag{2.11}$$

$$R^{0}_{0ij} - R^{\alpha}_{\alpha ij} = m^{1h}_{0\underline{i}} b^{0}_{1h\underline{j}}\,, \tag{2.12}$$

$$m^{1}_{0\underline{i}|\underline{j}} + n^{\lambda}_{0\underline{i}} m^{1}_{\lambda\underline{j}} + m^{1h}_{0\underline{i}} p_{h\underline{j}} = 0, \tag{2.13}$$

$$n^{\lambda}_{0\underline{i}|\underline{j}} + m^{1h}_{0\underline{i}} b^{\lambda}_{1h\underline{j}} = 0, \tag{2.14}$$

$$m^{1}_{\lambda\underline{i}|\underline{j}} + m^{1h}_{\lambda\underline{i}} p_{h\underline{j}} = 0, \tag{2.15}$$

$$m^{1}_{0\underline{i}} \delta^{h}_{\underline{j}} + n^{\lambda}_{0\underline{i}} m^{1h}_{\lambda\underline{j}} + m^{1h}_{0\underline{i}|\underline{j}} = 0, \tag{2.16}$$

$$R^{\sigma}_{\lambda ij} - R^{\alpha}_{\alpha ij} \delta^{\sigma}_{\lambda} = m^{1h}_{\lambda\underline{i}} b^{\sigma}_{1h\underline{j}}\,, \tag{2.17}$$

$$m^{1h}_{\lambda\underline{i}} b^{0}_{1h\underline{j}} = 0, \tag{2.18}$$

$$m^{1}_{\lambda\underline{i}} \delta^{h}_{\underline{j}} + m^{1h}_{\lambda\underline{i}|\underline{j}} = 0. \tag{2.19}$$

Имеют место следующие предложения:

Т е о р е м а [2.I]. Если $m \neq 2$, то

I) соотношение (2.5) является следствием (2.6)-(2.8),

2) соотношение (2.II) является следствием (2.8)-(2.I0),(2.I6), (2.I9),

3) соотношение (2.I3) является следствием (2.6)-(2.8),(2.I2), (2.I4),(2.I6),(2.I9),

4) соотношение (2.I5) является следствием (2.8),(2.I7)-(2.I9).

Т е о р е м а [2.2]. Если ранг тензора b^{0}_{1ij} больше двух, то условие (2.I2) есть следствие условий (2.8),(2.9),(2.I8), а условие (2.I4) есть следствие условий (2.7)-(2.I0) и (2.I7).

Рассмотрим для примера доказательство предложения 4), [2.I].

Продифференцируем соотношение (2.I9) по k и запишем трижды, циклируя по i, j, k. Затем, сложив полученные равенства и принимая во внимание лемму [2.I] работы [I], §4, находим, что

$$m^{1h}_{\lambda i|\underline{j}\underline{k}} + m^{1h}_{\lambda j|\underline{k}\underline{i}} + m^{1h}_{\lambda k|\underline{i}\underline{j}} + m^{1}_{\lambda\underline{i}|\underline{k}} \delta^{h}_{j} + m^{1}_{\lambda\underline{k}|\underline{j}} \delta^{h}_{i} + m^{1}_{\lambda\underline{j}|\underline{i}} \delta^{h}_{k} = 0\,.$$

Воспользовавшись тождествами Риччи (I.II), перепишем это выражение таким образом:

$$S^{1h}_{\lambda ijk} + S^{1h}_{\lambda jki} + S^{1h}_{\lambda kij} + m^{1}_{\lambda\underline{i}|\underline{k}} \delta^{h}_{j} + m^{1}_{\lambda\underline{k}|\underline{j}} \delta^{h}_{i} + m^{1}_{\lambda\underline{j}|\underline{i}} \delta^{h}_{k} = 0\,, \tag{2.20}$$

где

$$S^{1h}_{\lambda ijk} = m^{1h}_{\sigma i} R^{\sigma}_{\lambda jk} - m^{1h}_{\lambda i} R^{1}_{1jk} - m^{1s}_{\lambda i} R^{h}_{sjk} =$$

$$= m^{1h}_{\sigma i} R^{\sigma}_{\lambda jk} - m^{1s}_{\lambda i} \left(R^{h}_{sjk} + \delta^{h}_{s} R^{1}_{1jk}\right).$$

Пользуясь (2.8),(2.I7), получим

$$S^{1h}_{\lambda ijk} = m^{1h}_{\sigma i}\, m^{1s}_{\lambda \underline{j}}\, b^{\sigma}_{1s\underline{k}} - m^{1s}_{\lambda i}\, p_{s\underline{j}}\, \delta^{h}_{\underline{k}} - m^{1s}_{\lambda i}\, m^{1h}_{o\underline{k}}\, b^{o}_{1s\underline{j}} -$$

$$- m^{1s}_{\lambda i}\, m^{1h}_{\sigma \underline{k}}\, b^{\sigma}_{1s\underline{j}}. \qquad (2.21)$$

Наконец, подставляя значение $S^{1h}_{\lambda ijk}$ (2.2I) в (2.20) и учитывая лемму [2.I] работы [2], §4, а также (2.I8), приходим к следующему соотношению

$$m^{1}_{\lambda \underline{i}|\underline{k}}\,\delta^{h}_{j} + m^{1}_{\lambda \underline{k}|\underline{j}}\,\delta^{h}_{i} + m^{1}_{\lambda \underline{j}|\underline{i}}\,\delta^{h}_{k} +$$

$$+ m^{1s}_{\lambda \underline{i}}\, p_{s\underline{k}}\,\delta^{h}_{j} + m^{1s}_{\lambda \underline{k}}\, p_{s\underline{j}}\,\delta^{h}_{i} + m^{1s}_{\lambda \underline{j}}\, p_{s\underline{i}}\,\delta^{h}_{k} = 0$$

или

$$\delta^{h}_{j}(m^{1}_{\lambda \underline{i}|\underline{k}} + m^{1s}_{\lambda \underline{i}}\, p_{s\underline{k}}) + \delta^{h}_{i}(m^{1s}_{\lambda \underline{k}}\, p_{s\underline{j}} + m^{1}_{\lambda \underline{k}|\underline{j}}) + \delta^{h}_{k}(m^{1}_{\lambda \underline{j}|\underline{i}} + m^{1s}_{\lambda \underline{j}}\, p_{s\underline{i}}) = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание лемму [2.2] работы [1], §4, приходим к (2.I5).

Таким образом, имеет место следующая основная теорема:

Т е о р е м а [2.3]. Оснащенная регулярная m-мерная гиперполоса с ассоциированной связностью $X(\Gamma_m)$ проективного пространства P_n определяется с точностью до проективного преобразования заданием в составном многообразии $X_{n(m)}$ объекта связности $\Pi_i\{\Pi^{h}_{ij}, \Pi^{\alpha}_{\beta i}, \Pi^{1}_{1i}, \Pi^{o}_{oi}, \Pi^{\chi}_{\lambda i}\}$ и тензоров $p_{ij}, b^{o}_{1ij}, b^{\lambda}_{1ij}, m^{1}_{oi}, n^{\lambda}_{oi}, m^{1h}_{oi}, m^{1}_{\lambda i}, m^{1h}_{\lambda i}$, удовлетворяющих в общем случае условиям (2.5)′-(2.I9) и, если $\tau = rang\,\|b^{o}_{1ij}\| > 2$, условиям (2.6)-(2.IO),(2.I6)-(2.I9),(2.5)′.

Не все основные тензоры оснащенной регулярной гиперполосы

являются независимыми. Так из соотношений (2.8) и (2.5),(2.IO), (2.I9),(2.II) при $m \neq 1$ находим, что

$$m^{1h}_{ok} = \frac{1}{m-1}\, b^{1ij}_{o}\,(R^{h}_{ijk} + \delta^{h}_{i}\, p_{\underline{j}\underline{k}} + \delta^{h}_{\underline{j}}\, p_{i\underline{k}} + b^{\lambda}_{1i\underline{k}}\, m^{1h}_{\lambda \underline{j}}),$$

$$n^{\lambda}_{ok} = \frac{1}{m-1}\cdot b^{1ij}_{o}\, b^{\lambda}_{1i\underline{k}|\underline{j}}, \qquad (2.22)$$

$$m^{1}_{\lambda i} = \frac{1}{m-1}\cdot m^{1h}_{\lambda \underline{h}|\underline{i}},$$

$$m^{1}_{ok} = \frac{1}{m-1}\, b^{1ij}_{o}\, p_{i\underline{k}|\underline{j}} + \frac{1}{(m-1)^2}\, b^{1ij}_{o}\, b^{\lambda}_{1ij}\, m^{1h}_{\lambda \underline{k}|\underline{h}} + \frac{1}{(m-1)^2}\, b^{1ij}_{o}\, b^{\lambda}_{1ik}\, m^{1h}_{\lambda \underline{h}|\underline{j}}.$$

Следовательно,

Т е о р е м а [2.4]. Оснащенная регулярная m-мерная гиперполоса с ассоциированной связностью $X(\Gamma_m)$ (где $m \neq 1$) проективного пространства P_n определяется с точностью до проективного преобразования заданием в составном многообразии $X_{n(m)}$ объекта связности Π_i и тензоров $p_{ij}, b^{o}_{1ij}, b^{\lambda}_{1ij}, m^{1h}_{\lambda i}$, удовлетворяющих условиям (2.5)′-(2.I9), а при $\tau = rang\,\|b^{o}_{1ij}\| > 2$ - условиям (2.5)′,(2.6)-(2.IO),(2.I6)-(2.I9), где тензоры m^{1h}_{ok}, n^{λ}_{ok}, $m^{1}_{\lambda i}$, m^{1}_{ok} определяются из соотношений (2.22).

По тензорам b^{λ}_{1ij} и n^{λ}_{oi} можно определить погружена ли базисная поверхность гиперполосы $X(\Gamma_m)$ в $P_{n'} \subset P_n$, где $n' < n$.

Т е о р е м а [2.5]. Для того, чтобы базисная поверхность оснащенной регулярной гиперполосы $X(\Gamma_m) \subset P_n$ лежала в $P_{m+p} \subset P_n$ (где $m+p < n$), необходимо и достаточно, чтобы при произвольном оснащении существовала такая система координат в N_{n-m}, в которой

$$b^{\chi_2}_{1ij} = 0, \quad n^{\chi_2}_{oi} = 0, \quad \Gamma^{\rho_2}_{\chi_2 i} = 0, \qquad (2.23)$$

где

$$\varkappa_1 = 1,2,\dots,p-1; \quad \beta_2, \varkappa_2 = p, p+1, \dots, n-m-1.$$

Доказательство этого предложения совершенно аналогично доказательству теоремы [4.7] работы [I], §4.

Как следствие этой теоремы имеем предложение:

Т е о р е м а [2.6]. Для того, чтобы базисная поверхность оснащенной регулярной гиперполосы $X(\Gamma_m)$ была вырождена в P_{m+1}, необходимо и достаточно, чтобы при произвольном оснащении существовала такая система координат в N_{n-m}, в которой

$$b^{\lambda}_{1ij} = 0, \quad n^{\lambda}_{0i} = 0 \tag{2.24}$$

Выясним геометрический смысл связности Π^{k}_{ij}, определенной соотношением (I.5).

Пусть a^i -произвольный ненулевой вектор базисного многообразия оснащенной гиперполосы. Поставим этому вектору в соответствие точку $A^{\alpha}_1 = a^i M^{\alpha}_{1|i}$, принадлежащую нормали второго рода. Легко видеть, что коллинеарным векторам соответствует одна и та же точка, поэтому её называют нормальной точкой [3], § 105, соответствующей направлению вектора a^i. Верно и обратное предложение.

Рассмотрим параллельное перенесение произвольного направления a^i, заданного в некоторой точке M^{α}_1 базисной поверхности, в бесконечно близкую точку $\widetilde{M}^{\alpha}_1$:

$$\delta a^i = a^i_{|j}\, dx^j = \lambda a^i \tag{2.25}$$

Пользуясь основными уравнениями (2.1), покажем, что при параллельном перенесении a^i (2.25) точка $\delta A^{\alpha}_1 = A^{\alpha}_{1|i}\, dx^i$ представляет собой линейную комбинацию точек $A^{\alpha}_1, M^{\alpha}_1, X^{\alpha}_0, X^{\alpha}_{\lambda}$

$$\delta A^{\alpha}_1 = (a^i M^{\alpha}_{1|i})_{|j}\, dx^j = a^i_{|j}\, dx^j M^{\alpha}_{1|i} + a^i dx^j M^{\alpha}_{1|ij} =$$

$$= \lambda A^{\alpha}_1 + a^i dx^j p_{ij} M^{\alpha}_1 + b^{0}_{1ij} a^i dx^j X^{\alpha}_0 + b^{\lambda}_{1ij} a^i dx^j X^{\alpha}_{\lambda},$$

то есть бесконечно малое смещение нормальной точки A^{α}_1, соответствующей направлению a^i, происходит в плоскости $P_{n-m-1}\{M^{\alpha}_1, X^{\alpha}_0, X^{\alpha}_{\lambda}, A^{\alpha}_1\}$, содержащей нормаль I-го рода N_{n-m}.

Таким образом, связность Π^{k}_{ij} является внутренней связностью первого рода, оснащённой гиперполосы в смысле А.П.Нордена [3], § 56.

§ 3. Двойственная теория гиперполосы $X(\Gamma_m)$.

Оснащенная регулярная гиперполоса является образом, который сам себе двойственен, причем точке M^{α}_1 базисной поверхности соответствует главная касательная гиперплоскость T^{0}_{α}, а касательной плоскости T_m базисной поверхности соответствует характеристика P_{n-m-1} свойства главных гиперплоскостей, так как T_m определяется точками $M^{\alpha}_1, M^{\alpha}_{1|i}$, а P_{n-m-1} определяется гиперплоскостями $T^{0}_{\alpha}, T^{0}_{\alpha|i}$. Двойственным образом $(n-m-2)$-мерной плоскости, определяемой точками X^{α}_{λ}, является $(m+1)$-мерная плоскость, определяемая гиперплоскостями T^{λ}_{α}, а для нормали I-го рода $(X^{\alpha}_0, X^{\alpha}_{\lambda}, M^{\alpha}_1)$ двойственным образом является нормаль 2-го рода $(T^{0}_{\alpha}, T^{\lambda}_{\alpha}, P^{1}_{\alpha})$. Итак, точкам $M^{\alpha}_1, X^{\alpha}_0, X^{\alpha}_{\lambda}, M^{\alpha}_{1|i}$, которые определяют контравариантный репер, соответствует в двойственной теории гиперполосы гиперплоскости T^{o}_{α}, P^{1}_{α}, T^{λ}_{α}, $T^{o}_{\alpha|i}$, определяющие ковариантный репер.

Нормаль I-го рода гиперполосы $X(\Gamma_m)$ аналитически может быть задана при помощи коэффициентов связности Π^{o}_{oi}, $\Pi^{\alpha}_{\beta i}$. В самом деле, гиперплоскости $T^{o}_{\alpha|i} = T^{o}_{\alpha,i} + \Pi^{o}_{oi} T^{o}_{\alpha} - \Pi^{\beta}_{\alpha i} T^{o}_{\beta}$ линейно независимы и определяют нормаль I-го рода. Верно и обратное предложение.

Основные уравнения оснащенной регулярной гиперполосы, двойственные уравнениям (2.I)-(2.3), имеют вид:

$$T^{o}_{\alpha\{ij} = \widetilde{p}_{ij} T^{o}_{\alpha} + b^{o}_{1ij} P^{1}_{\alpha} + b^{o}_{\lambda ij} T^{\lambda}_{\alpha}. \tag{3.1}$$

$$P^{1}_{\alpha|i} = \widetilde{m}^{1k}_{oi} T^{o}_{\alpha|k} - m^{1}_{oi} T^{o}_{\alpha} - m^{1}_{\lambda i} T^{\lambda}_{\alpha} \tag{3.2}$$

$$T^{\lambda}_{\alpha|i} = \widetilde{m}^{\lambda k}_{oi} T^{o}_{\alpha|k} - n^{\lambda}_{oi} T^{o}_{\alpha}, \tag{3.3}$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_{ij} &= b^{o}_{1ki} m^{1k}_{oj}, \\ b^{o}_{\lambda ij} &= m^{1k}_{\lambda j} b^{o}_{1ki}, \\ \widetilde{m}^{1k}_{oi} &= b^{1k\ell}_{o} p_{\ell i}, \\ \widetilde{m}^{\lambda k}_{oi} &= b^{\lambda}_{1\ell i} b^{1\ell k}_{o}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

а знак " $\{$ " означает дифференцирование относительно объекта связности F_i двойственного Π_i.

Объект связности F_i состоит из аффинной связности

$$F^{k}_{ij} = T^{o}_{\alpha,ij} S^{\alpha k}_{o} - 2T^{o}_{\alpha,(i} X^{\alpha}_{|o|} \delta^{k}_{j)} \tag{3.5}$$

двойственной Π^{k}_{ij} и псевдосвязностей

$$\begin{aligned} F^{o}_{oi} &= -\Pi^{o}_{oi}, \\ F^{1}_{1i} &= -\Pi^{1}_{1i}, \\ F^{\varkappa}_{\lambda i} &= -\Pi^{\varkappa}_{\lambda i}, \\ F^{\alpha}_{\beta i} &= -\Pi^{\alpha}_{\beta i}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Так как псевдосвязность F^{1}_{1i} двойственна Π^{o}_{oi}, F^{o}_{oi} - двойственна Π^{1}_{1i}, а $F^{\alpha}_{\beta i}$ - двойственна $\Pi^{\alpha}_{\beta i}$, то формула дифференцирования относительно связности F_i имеет следующий вид:

$$A^{\alpha o}_{\lambda 1 i|j} = A^{\alpha o}_{\lambda 1 i,j} - F^{o}_{oj} A^{\alpha o}_{\lambda 1 i} - F^{\alpha}_{\beta j} A^{\beta o}_{\lambda 1 i} + F^{\varkappa}_{\lambda j} A^{\alpha o}_{\varkappa 1 i} + F^{1}_{1j} A^{\alpha o}_{\lambda 1 i} + F^{k}_{ij} A^{\alpha o}_{\lambda 1 k}. \tag{3.7}$$

Из неё вытекает, что

$$A^{\alpha o}_{\lambda 1\{j} = A^{\alpha o}_{\lambda 1,j} + \Pi^{o}_{oj} A^{\alpha o}_{\lambda 1} + \Pi^{\alpha}_{\beta j} A^{\beta o}_{\lambda 1} - \Pi^{1}_{1j} A^{\alpha o}_{\lambda 1} - \Pi^{\varkappa}_{\lambda j} A^{\alpha o}_{\varkappa 1} = A^{\alpha o}_{\lambda 1|j}. \tag{3.8}$$

В силу (3.8) в уравнениях (3.2) и (3.3) вместо знака " $\{$ " стоит знак " $|$ ".

Условия интегрируемости системы уравнений (3.I)-(3.3) имеют следующий вид:

$$R^{\alpha}_{\beta ij} = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \tag{3.9'}$$

$$R^{\alpha}_{\alpha ij} - R^{o}_{oij} = \widetilde{p}_{ij}, \text{ (по } \alpha \text{ не суммировать)} \tag{3.9}$$

$$b^{o}_{1[ij]} = 0, \tag{3.10}$$

$$b^{0}_{\lambda i \underline{j}} = 0, \tag{3.11}$$

$$\widetilde{R}^{h}_{ijk} - R^{0}_{ojk}\delta^{h}_{i} + \delta^{h}_{i} R^{\alpha}_{\alpha jk} = \widetilde{p}_{i\underline{j}}\delta^{h}_{\underline{k}} + b^{0}_{1i\underline{j}}\widetilde{m}^{1h}_{o\underline{k}} + b^{0}_{\lambda i \underline{j}}\widetilde{m}^{\lambda h}_{o\underline{k}}, \tag{3.12}$$

$$b^{0}_{1i\underline{j}\{\underline{k}} = 0, \tag{3.13}$$

$$b^{\lambda}_{1ij\{\underline{k}} - b^{0}_{1i\underline{j}} m^{1}_{\lambda \underline{k}} = 0, \tag{3.14}$$

$$\widetilde{p}_{i\underline{j}\{\underline{k}} - b^{0}_{1i\underline{j}} m^{1}_{o\underline{k}} - b^{0}_{\lambda i \underline{j}} n^{\lambda}_{o\underline{k}} = 0, \tag{3.15}$$

$$R^{1}_{1ij} - R^{\alpha}_{\alpha ij} = b^{0}_{1h\underline{i}}\widetilde{m}^{1h}_{o\underline{j}}, \tag{3.16}$$

$$\widetilde{m}^{1k}_{o\underline{i}}\widetilde{p}_{kj} - m^{1}_{o i\{\underline{j}} + m^{1}_{\lambda \underline{i}} n^{\lambda}_{o\underline{j}} = 0, \tag{3.17}$$

$$\widetilde{m}^{1h}_{o\underline{i}} b^{0}_{\lambda h\underline{j}} - m^{1}_{\lambda\underline{i}\{\underline{j}} = 0, \tag{3.18}$$

$$\widetilde{m}^{\lambda h}_{o\underline{i}} p_{h\underline{j}} - n^{\lambda}_{o\underline{i}\{\underline{j}} = 0, \tag{3.19}$$

$$\widetilde{m}^{1h}_{o\underline{i}\{\underline{j}} - m^{1}_{o\underline{i}}\delta^{h}_{\underline{j}} - m^{1}_{\lambda\underline{i}}\widetilde{m}^{\lambda h}_{o\underline{j}} = 0, \tag{3.20}$$

$$R^{\varkappa}_{\lambda ij} - \delta^{\varkappa}_{\lambda} R^{\alpha}_{\alpha ij} = b^{0}_{\varkappa h \underline{i}}\widetilde{m}^{\lambda h}_{o\underline{j}}, \tag{3.21}$$

$$\widetilde{m}^{\lambda h}_{o\underline{i}} b^{0}_{1h\underline{j}} = 0, \tag{3.22}$$

$$\widetilde{m}^{\lambda h}_{o\underline{i}\{\underline{j}} - n^{\lambda}_{o\underline{i}}\delta^{h}_{\underline{j}} = 0. \tag{3.23}$$

Аналогично, как это было рассмотрено в §2, показывается, что

а) условия (3.9), (3.15), (3.17), (3.19) являются следствиями остальных, если $m \neq 2$,

б) и если ранг тензора b^{0}_{1ij} больше двух, то условие (3.16) является следствием условий (3.12)-(3.13), (3.22), а условие (3.18) является следствием (3.11)-(3.14), (3.21).

Имеют место следующие основные теоремы, двойственные теоре[мам] [2.3] и [2.4]:

Т е о р е м а [3.1]. Оснащенная регулярная m-мерная гиперполоса с ассоциированной связностью $X(\Gamma_m)$ проективного пространства P_n определяется с точностью до проективного преобразования заданием в составном многообразии $X_{n(m)}$ объекта связности $F_i\,\{F^{h}_{ij},\ F^{\alpha}_{\beta i},\ F^{1}_{1i},\ F^{0}_{oi},\ F^{\varkappa}_{\lambda i}\}$ и тензоров $\widetilde{p}_{ij},\ b^{0}_{1ij},\ b^{\lambda}_{1ij}$, $m^{1}_{oi},\ m^{1}_{\lambda i},\ \widetilde{m}^{1h}_{oi},\ n^{\lambda}_{oi},\ \widetilde{m}^{\lambda h}_{oi}$, удовлетворяющих в общем случае условиям (3.9)′-(3.23), а при $\tau > 2$ -условиям (3.10)-(3.14), (3.20)-(3.23), (3.9)′.

Т е о р е м а [3.2]. Оснащенная регулярная m-мерная гиперполоса с ассоциированной связностью $X(\Gamma_m)$ (где $m \neq 1$) проективного пространства P_n определяется с точностью до проективного преобразования заданием в составном многообразии $X_{n(m)}$ объекта связности F_i и тензоров $b^{0}_{1ij},\ \widetilde{p}_{ij},\ b^{0}_{\lambda ij},\ \widetilde{m}^{\lambda h}_{oi}$, удовлетворяющих условиям (3.9)′-(3.23), а при $\tau > 2$ -условиям (3.9)′ (3.10)-(3.14), (3.20)-(3.23), где

$$\widetilde{m}^{1h}_{ok} = \frac{1}{m-1}\cdot b^{1ij}_{0}\left(\widetilde{R}^{h}_{ijk} + \delta^{h}_{i}\widetilde{p}_{\underline{j}\underline{k}} + \delta^{h}_{\underline{j}}\widetilde{p}_{i\underline{k}} - b^{0}_{\lambda i\underline{j}}\widetilde{m}^{\lambda h}_{o\underline{k}}\right),$$

$$m^{1}_{\lambda k} = \frac{1}{m-1}\cdot b^{1ij}_{0}\, b^{0}_{\lambda i\underline{k}\{\underline{j}},$$

$$m^{\lambda}_{ok} = \frac{1}{m-1}\cdot \widetilde{m}^{\lambda h}_{o\underline{h}\{\underline{k}},$$

$$\widetilde{m}^{1}_{ok} = \frac{1}{m-1}\cdot b^{1ij}_{0}\widetilde{p}_{i\underline{k}\{\underline{j}} + \frac{1}{(m-1)^2}\cdot\left(b^{1ij}_{0} b^{0}_{\lambda i\underline{j}}\widetilde{m}^{\lambda h}_{o\underline{k}\{\underline{h}} + b^{1ij}_{0} b^{0}_{\lambda i\underline{k}}\widetilde{m}^{\lambda h}_{o\underline{h}\{\underline{j}}\right).$$

Связность Γ^k_{ij} является внутренней связностью 2-го рода, оснащенной регулярной гиперполосы $X(\Gamma_m)$. Таким образом, используя соответствующее предложение А.П.Нордена [3], §62, мы приходим к выводу, что связности Π^k_{ij} и Γ^k_{ij} сопряжены относительно главного фундаментального тензора $\overset{\circ}{b}_{ij}$.

Литература:

[1]. Атанасян Л.С., К теории оснащенных поверхностей многомерного проективного пространства. "Ученые зап. МГПИ им. В.И.Ленина, 1957, 108, вып.2, с.3-44.

[2]. Попов Ю.И., К теории оснащенной гиперполосы в многомерном проективном пространстве. "Уч.зап.МГПИ им.В.И.Ленина, 1970, 374, том.I, с.102-117.

[3]. Норден А.П., Пространства аффинной связности. ГИТТЛ, 1950.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3 1973

ПОХИЛА М.М.

О ГЕОМЕТРИИ ПАРЫ МНОГООБРАЗИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В n-мерном проективном пространстве рассматриваются $(n-1)$-мерные пары многообразий (Φ_1), (Φ_2) квадратичных элементов Φ_1, Φ_2 [3] с несовпадающими гиперплоскостями τ_1, τ_2. Через A_0 и A_n обозначаются полюса $(n-2)$-плоскости τ пересечения гиперплоскостей τ_1 и τ_2 относительно Φ_1 и Φ_2.

Пара многообразий (Φ_1), (Φ_2) называется парой $V_{n-1,n}$, если точки A_0 и A_n не инцидентны $(n-2)$-плоскости τ.

Для пары $V_{n-1,n}$ построено инвариантное оснащение гиперповерхностей (A_0) и (A_n), найдены и охарактеризованы различные инвариантные точки, прямые $(n-1)$, $(n-2)$ и $(n-3)$-мерные плоскости. В случае пар $\overset{\circ}{V}_{n-1,n}$, у которых A_0 и A_n являются характеристическими точками гиперплоскостей τ_1 и τ_2, найдены пучки соприкасающихся гиперповерхностей (A_0) и (A_n).

Рассматриваемые в работе индексы принимают следующие значения

$$a, b, c = 0, 1, \dots, n-1, n; \qquad i, j, k = 1, 2, \dots, n-2, n-1;$$

$$\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, n-2, n-1; \qquad \lambda, \mu, \nu = 1, 2, \dots, n-1, n.$$