Список литературы

1. *Акивис М.А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977.
2. *Бишоп Р., Криттенден Р.* Геометрия многообразий. М., 1967.
3. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. С. 5—247.
4. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.
5. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т.1. С.139—189.
6. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр 4. Дифференциальная геометрия : учеб. пособие для вузов. М., 1988.
7. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

K. Polyakova

Dual methods of investigation of differential-geometric structures

We proceed the studying manifold carried out by means of covariant method in [7] and based on derivation formulae and structure equations.

УДК 514.75

Ю.И. Попов

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Связности на оснащенной регулярной гиперполосе SH_m

Данная статья является продолжением работы [1]. На оснащенной полем нормалей 1-го рода гиперполосе SH_m[1] введены внутренние аффинные и нормальные центроаффинные связности соответственно в касательных и нормальных подрасслоениях, ассоциированных с гиперполосой SH_m.

Ключевые слова: оснащение, подрасслоение, связность, гиперполоса, формы связности, тензор кривизны, 2-формы кривизны.

Во всей работе использована следующая схема индексов: $J,F,K=\overline{1,n}$; $\alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1}$; $h,i,j,k=\overline{1,m}$; $\hat{\alpha},\hat{\beta}=\overline{m+1,n}$; $p,q,s,t=\overline{2,m}$; $\widehat{p,q},\hat{s},\hat{t}=\{\overline{2,m};n\}$; $a,b,s,d=\{\overline{1,\alpha}\}$; $\hat{a},\hat{b},\hat{c}=\{\overline{1,\alpha};n\}$; $u,\upsilon,w=\{\overline{p;\alpha}\}$; $\hat{u},\hat{\upsilon},\hat{w}=\{\overline{p,\alpha},n\}$.

§ 1. Задание внутренней аффинной связности на оснащенной регулярной гиперполосе SH_m

1. Известно [1], что относительно репера R^1 гиперполоса $SH_m\subset A_n$ задается уравнениями

$$\omega_0^n=0,\ \omega_0^\alpha=0,\ \omega_\alpha^n=0,$$
$$\omega_p^n=b_{pq}^n\omega^q,\ \omega_1^n=b_{11}^n\omega^1,\ \omega_p^\alpha=b_{pq}^\alpha\omega^q,\ \omega_1^\alpha=b_{11}^\alpha\omega^1,$$
$$\omega_p^1=\lambda_{pi}^1\omega^i,\ \omega_1^p=\lambda_{1i}^p\omega^i,\ \omega_\alpha^1=\lambda_{\alpha i}^1\omega^i,\ \omega_\alpha^p=\lambda_{\alpha i}^p\omega^i,$$
$$\Delta b_{pq}^n=b_{pqi}^n\omega^i,\ \Delta b_{11}^n=b_{11i}^n\omega^i, \tag{1}$$
$$\Delta b_{pq}^\alpha+b_{pq}^n\omega_n^\alpha=b_{pqi}^\alpha\omega^i,\ \Delta b_{11}^\alpha+b_{11}^n\omega_n^\alpha=b_{11i}^\alpha\omega^i,$$
$$\Delta\lambda_{pi}^1+b_{pi}^n\omega_n^1=\lambda_{pij}^1\omega^j,\ \Delta\lambda_{1i}^p+b_{1i}^n\omega_n^p=\lambda_{1ij}^p\omega^j,$$
$$\Delta\lambda_{\alpha i}^1=\lambda_{\alpha ij}^1\omega^j,\ \Delta\lambda_{\alpha i}^p=\lambda_{\alpha ij}^p\omega^j$$

и соотношениями

$$b^n_{[pq]}=0,\ b^\alpha_{[pq]}=0,\ \lambda^t_{\alpha[p}b^n_{q]t}=0\ ,$$

$$\lambda^p_{\alpha 1}b^n_{pq}=\lambda^1_{\alpha q}b^n_{11}\Leftrightarrow\lambda^1_{\alpha q}=\lambda^p_{\alpha 1}b^{11}_n b^n_{pq}. \tag{2}$$

Адаптируем репер R^1 полю нормалей $N_{n-m}(A)\overset{def}{=}N(A)$ 1-го рода гиперполосы SH_m, выбирая вектор $\overline{e}_n\in N(A)$.

В этом случае

$$\omega^1_n=\lambda^1_{ni}\omega^1\ ,\ \omega^p_n=\lambda^p_{ni}\omega^i\ ,\ \omega^\alpha_n=\lambda^\alpha_{ni}\omega^i\ , \tag{3}$$

а поле нормалей 1-го рода $N_{n-m}(A)$ задается уравнениями

$$\Delta\lambda^1_{ni}=\lambda^1_{nij}\omega^j\ ,\ \Delta\lambda^p_{ni}=\lambda^p_{nij}\omega^j. \tag{4}$$

Отметим, что все тензоры $\{\lambda^1_{ni}\}$, $\{\lambda^p_{ni}\}$, $\{\lambda^\alpha_{ni}\}$ определены в дифференциальной окрестности 2-го порядка.

Таким образом, уравнения (1), (3), (4) вместе с соотношениями (2) задают оснащенную полем нормалей 1-го рода $N(A)$ гиперполосу $SH_m\subset A_n$.

2. При фиксации точки $A\overset{def}{=}x$ базисной поверхности $V_m\subset SH_m$ плоскости N_x (нормаль 1-го рода гиперполосы в точке $x\in V_m$) и T_x (касательная плоскость базисной поверхности V_m) остаются неподвижными. Следовательно, на базисной поверхности V_m возникает нормальное $N(V_m)$ и касательное $T(V_m)$ расслоения [2].

Структурные уравнения касательного расслоения $T(V_m)$ в силу формул (1—4) и дифференциальных уравнений структурных форм аффинного пространства имеют следующий вид [2; 3]:

$$d\omega^i = \omega^k \Lambda \omega_k^i;\ d\omega_p^q = \omega_p^s \Lambda \omega_s^q + \Omega_p^q,$$
$$d\omega_1^1 = \Omega_1^1;\ d\omega_1^p = \omega_1^i \Lambda \omega_i^p + \Omega_1^p, \tag{5}$$
$$d\omega_p^1 = \omega_p^i \Lambda \omega_i^1 + \Omega_p^1,$$

где

$$\Omega_p^q = \omega_p^1 \wedge \omega_1^q + \omega_p^\alpha \wedge \omega_\alpha^q + \omega_p^n \wedge \omega_n^q = (\lambda_{p[i}^1 \lambda_{|1|j]}^q + b_{pt}^\alpha \delta_{[i}^t \lambda_{|\alpha|j]}^q +$$
$$+ b_{pt}^n \delta_{[i}^t \lambda_{|n|j]}^q)\omega^i \wedge \omega^j = R_{pij}^q \omega^i \wedge \omega^j, \tag{6}$$

$$\Omega_1^1 = \omega_1^p \wedge \omega_p^1 + \omega_1^\alpha \wedge \omega_\alpha^1 + \omega_1^n \wedge \omega_n^1 = (\lambda_{1[i}^p \lambda_{|p|j]}^1 + b_{11}^\alpha \delta_{[i}^1 \lambda_{|\alpha|j]}^1 +$$
$$+ b_{11}^n \delta_{[i}^1 \lambda_{|n|j]}^1)\omega^i \wedge \omega^j = R_{1ij}^1 \omega^i \wedge \omega^j, \tag{7}$$

$$\Omega_1^p = \omega_1^\alpha \wedge \omega_\alpha^p + \omega_1^n \wedge \omega_n^p = (b_{11}^\alpha \delta_{[i}^1 \lambda_{|\alpha|j]}^p + b_{11}^n \delta_{[i}^1 \lambda_{|n|j]}^p)\omega^i \wedge \omega^j =$$
$$= R_{1ij}^p \omega^i \wedge \omega^j, \tag{8}$$

$$\Omega_p^1 = \omega_p^\alpha \wedge \omega_\alpha^1 + \omega_p^n \wedge \omega_n^1 = (b_{pq}^\alpha \delta_{[i}^q \lambda_{|\alpha|j]}^1 + b_{pq}^n \delta_{[i}^q \lambda_{|n|j]}^1)\omega^i \wedge \omega^j =$$
$$= R_{pij}^1 \omega^i \wedge \omega^j, \tag{9}$$

$$R_{pij}^q = \lambda_{p[i}^1 \lambda_{|1|j]}^q + b_{pt}^\alpha \delta_{[i}^t \lambda_{|\alpha|j]}^q + b_{pt}^n \delta_{[i}^t \lambda_{|n|j]}^q\ , \tag{10}$$

$$R_{1ij}^1 = \lambda_{1[i}^p b_{|p|j]}^1 + b_{11}^\alpha \delta_{[i}^1 \lambda_{|\alpha|j]}^1 + b_{11}^n \delta_{[i}^1 \lambda_{|n|j]}^1\ , \tag{11}$$

$$R_{1ij}^p = b_{11}^\alpha \delta_{[i}^1 \lambda_{|\alpha|j]}^p + b_{11}^n \delta_{[i}^1 \lambda_{|n|j]}^p\ , \tag{12}$$

$$R_{pij}^1 = b_{pq}^\alpha \delta_{[i}^q \lambda_{|\alpha|j]}^1 + b_{pq}^n \delta_{[i}^q \lambda_{|n|j]}^1\ . \tag{13}$$

Следуя работам [2; 3], приходим к выводу, что в касательном расслоении $T(V_m)$ возникает аффинная связность γ без кручения с формами связности $\{\omega^i,\ \omega_j^k\}$, которую назовем согласно работам [4; 5] внутренней (касательной) аффинной связностью оснащенной гиперполосы SH_m.

Итак, справедлива

Теорема 1. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенная гиперполоса* SH_m *(полем нормалей 1-го рода* $N(A)$*) индуцирует внутреннюю аффинную связность* γ *в касательном расслоении* $T(V_m)$ *с формами связности* $\{\omega^i,\ \omega_j^k\}$ *(5) и 2-формами кривизны (6—9). Компоненты тензора кривизны* $R_{kij}^h = \{R_{pij}^q,\ R_{1ij}^1,\ R_{1ij}^p,\ R_{pij}^1\}$ *связности* γ *имеют строение (10—13).*

Внутренние аффинные связности, порождаемые связностью γ в слоях Δ-подрасслоения и Δ^*-подрасслоения, обозначим соответственно γ_Δ и γ_{Δ^*}.

Согласно этому замечанию в силу теоремы 1 имеет место

Теорема 2. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка связность* γ *порождает в* Δ*-подрасслоении (соответственно в* Δ^**-подрасслоении) связность* $\gamma_\Delta(\overset{*}{\gamma}_\Delta)$ *с формами связности* $\{\omega^i,\ \omega_p^q\}$ *(соответственно* $\{\omega^i,\ \omega_1^1\}$ *и 2-формой кривизны* Ω_p^q *(6)* $(\Omega_1^1$ *(7)). Тензор кривизны связности* γ_Δ *имеет вид (10), а для связности* γ_{Δ^*} *соответственно (11).*

§ 2. Задание нормальной аффинной связности на оснащенной регулярной гиперполосе SH_m

1. Структурные уравнения нормального расслоения $N(V_m)$ [2] с учетом выражений (1—4) можно представить в виде

$$d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \Omega_\alpha^\beta,\ d\omega_\alpha^n = 0, \tag{14}$$

$$d\omega_n^\alpha = \omega_n^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega_n^n \wedge \omega_n^\alpha + \Omega_n^\alpha,\ d\omega_n^n = \Omega_n^n,$$

где

$$\begin{cases} \Omega_{\alpha}^{\beta} = \omega_{\alpha}^{k} \wedge \omega_{k}^{\beta} = \lambda_{\alpha[i}^{k} b_{j]k}^{\beta} \omega^{i} \wedge \omega^{j} = R_{\alpha ij}^{\beta} \omega^{i} \wedge \omega^{j}, \text{ (a)} \\ \Omega_{n}^{\alpha} = \omega_{n}^{k} \wedge \omega_{k}^{\alpha} = \lambda_{n[i}^{k} b_{j]k}^{\alpha} \omega^{i} \wedge \omega^{j} = R_{nij}^{\alpha} \omega^{i} \wedge \omega^{j}, \\ \Omega_{\alpha}^{n} = \lambda_{\alpha[i}^{k} b_{j]k}^{n} \omega^{i} \wedge \omega^{j} = R_{\alpha ij}^{n} \omega^{i} \wedge \omega^{j}, \\ \Omega_{n}^{n} = \omega_{n}^{k} \wedge \omega_{k}^{n} = \lambda_{n[i}^{k} b_{j]k}^{n} \omega^{i} \wedge \omega^{j} = R_{nij}^{n} \omega^{i} \wedge \omega^{j}, \end{cases} \tag{15}$$

$$R_{\alpha ij}^{\beta} = \lambda_{\alpha[i}^{k} b_{j]k}^{\beta},\ R_{nij}^{\alpha} = \lambda_{n[i}^{k} b_{j]k}^{\alpha},\ R_{\alpha ij}^{n} = \lambda_{\alpha[i}^{k} b_{j]k}^{n},\ R_{n}^{n} = \lambda_{n[i}^{k} b_{j]k}^{n}. \tag{16}$$

Согласно работе [2] получаем, что в нормальном расслоении $N(V_m)$ возникает центроаффинная связность $\gamma^{\perp}$ с формами связности $\{\omega_{\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}}\}$ и 2-формами кривизны (15), которую назовем нормальной центроаффинной связностью оснащенной гиперполосы SH_m.

Теорема 3. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенная гиперполоса SH_m индуцирует в расслоении $N(V_m)$ нормалей 1-го рода нормальную центроаффинную связность $\gamma^{\perp}$ с формами связности $\{\omega_{\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}}\}$ (14) и 2-формами кривизны (15), компоненты тензора кривизны $R_{\hat{\beta}kl}^{\hat{\alpha}}$ которой имеют строение (16).*

Так как в каждой точке $x \in V_m$ определена характеристика X_{n-m-1} гиперполосы SH_m [4], причем $X_{n-m-1}\ (x) \subset N_x$, то на базисной поверхности V_m определено расслоение характеристик $X(V_m)$, которое представляет собой нормальное (n – m – 1)-мерное подрасслоение $N_{n-m-1}(V_m)$ [2].

Структурные уравнения расслоения $X(V_m)$ определяются выражениями (12a—14a). Связность в расслоении $X(V_m)$ назовем нормальной центроаффинной характеристической связностью $\eta^{\perp}$ гиперполосы SH_m.

2. Аналогично можно построить нормальную аффинную связность $\vartheta^{\perp}$ в расслоении $N_{n-m+1}(V_m)$ нормалей 1-го рода Δ — подрасслоения гиперполосы SH_m. Структурные уравнения нормального расслоения $N_{n-m+1}(V_m)$ имеют следующее строение:

$$\begin{cases} d\omega_a^b = \omega_a^c \wedge \omega_c^b + \Omega_a^b,\ d\omega_a^n = \omega_a^{\hat{b}} \wedge \omega_{\hat{b}}^n + \Omega_a^n, \\ d\omega_n^a = \omega_n^{\hat{b}} \wedge \omega_{\hat{b}}^a + \Omega_n^a,\ d\omega_n^n = \Omega_n^n, \end{cases} \tag{17}$$

где

$$\Omega_a^b = \omega_a^{\hat{p}} \wedge \omega_{\hat{p}}^b,\ \omega_a^p = \{\omega_1^p,\ \omega_\alpha^p\},\ \omega_p^b = \{\omega_p^1,\ \omega_p^\alpha\},$$

$$\begin{cases} \Omega_a^b = (\lambda_{a[i}^p b_{|p|j]}^b + b_{a[i}^n \lambda_{|n|j]}^b)\omega^i \wedge \omega^j = r_{aij}^b \omega^i \wedge \omega^j, \\ \Omega_a^n = \omega_a^p \wedge \omega_p^n = \lambda_{a[i}^p \delta_{j]}^q b_{pq}^n \omega^i \wedge \omega^j = r_{aij}^n \omega^i \wedge \omega^j, \\ \Omega_n^a = \omega_n^p \wedge \omega_p^a = \lambda_{n[i}^p b_{|p|j]}^a \omega^i \wedge \omega^j = r_{nij}^a \omega^i \wedge \omega^j, \\ \Omega_n^n = \omega_n^p \wedge \omega_p^n + \omega_n^1 \wedge \omega_1^n = (\lambda_{n[i}^p \delta_{j]}^q b_{pq}^n + \lambda_{n[i}^1 \delta_{j]}^1 b_{11}^n)\omega^i \wedge \omega^j = \\ = r_{nij}^n \omega^i \wedge \omega^j, \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} r_{aij}^b = \lambda_{a[i}^p b_{|p|j]}^b + b_{a[i}^n \lambda_{|n|j]}^b, \\ r_{aij}^n = \lambda_{a[i}^p \delta_{j]}^q b_{pq}^n,\ r_{nij}^a = \lambda_{n[i}^p b_{|p|j]}^a, \\ r_{nij}^n = \lambda_{n[i}^p \delta_{j]}^q b_{pq}^n + \lambda_{n[i}^1 \delta_{j]}^1 b_{11}^n. \end{cases} \tag{19}$$

Теорема 4. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенная гиперполоса* SH_m *внутренним образом порождает нормальную центроаффинную связность* $\vartheta^{\perp}$ *в расслоении* $N_{n-m+1}(V_m)$ *нормалей 1-го рода* Δ*-подрасслоения с формами связности* $\{\omega_{\hat{a}}^{\hat{b}}\}$ *(17) и 2-формами кривизны* $\{\Omega_{\hat{a}}^{\hat{b}}\}$ *(18), компоненты тензора кривизны* $\{r_{\hat{a}ij}^{\hat{b}}\}$ *которой имеют строение (19).*

3. Построим нормальную аффинную связность $\psi^{\perp}$ в расслоении $N_{n-1}(V_m)$ нормалей 1-го рода Δ^*-подрасслоения гиперполосы SH_m.

Структурные уравнения нормального расслоения $N_{n-1}(V_m)$ имеют вид

$$d\omega_u^v = \omega_u^w \wedge \omega_w^v + \Omega_u^v,$$

$$d\omega_n^u = \omega_n^{\hat{v}} \wedge \omega_{\hat{v}}^u + \Omega_n^u,\ d\omega_n^n = \Omega_n^n,$$

$$\Omega_u^v = \omega_u^1 \wedge \omega_1^v + \omega_u^n \wedge \omega_n^v;\ \omega_u^1 = \{\omega_p^1, \omega_\alpha^1\},\ \omega_1^v = \{\omega_1^p, \omega_1^\alpha\}.$$

Распишем более подробно 2-формы кривизны связности $\psi^{\perp}$:

$$\begin{cases} \Omega_u^v = (\lambda_{u[i}^1 \lambda_{|1|j]}^v + b_{tq}^n \delta_u^t \delta_{[i}^q \lambda_{|n|j]}^v)\omega^i \wedge \omega^j = R_{uij}^v \omega^i \wedge \omega^j, \\ \Omega_n^v = \omega_n^1 \wedge \omega_1^v = (\lambda_{n[i}^1 \lambda_{|1|j]}^v)\omega^i \wedge \omega^j = R_{nij}^v \omega^i \wedge \omega^j, \\ \Omega_u^n = \omega_u^1 \wedge \omega_1^n = (b_{11}^n \lambda_{u[i}^1 \delta_{j]}^1)\omega^i \wedge \omega^j = R_{uij}^n \omega^i \wedge \omega^j, \\ \Omega_n^n = \omega_n^1 \wedge \omega_1^n + \omega_n^p \wedge \omega_p^n = (b_{11}^n \lambda_{n[i}^1 \delta_{j]}^1 + b_{pq}^n \lambda_{n[i}^p \delta_{j]}^q)\omega^i \wedge \omega^j \\ = R_{nij}^n \omega^i \wedge \omega^j, \end{cases} \tag{20}$$

где

$$\lambda_{ui}^{1} \overset{def}{=} \{b_{pi}^{1},\ \lambda_{\alpha i}^{1}\},\ \lambda_{1i}^{v} \overset{def}{=} \{\lambda_{1i}^{p}, b_{1i}^{\alpha}\},\ \omega_{1}^{v} \overset{def}{=} \lambda_{1i}^{v}\omega^{i}.$$

$$\begin{cases} R_{uij}^{v} = \lambda_{u[i}^{1}\lambda_{|1|j]}^{v} + b_{tq}^{n}\delta_{u}^{t}\delta_{[i}^{q}\lambda_{|n|j}^{v},\ R_{uij}^{n} = b_{11}^{n}\lambda_{u[i}^{1}\delta_{j]}^{1}, \\ R_{nij}^{v} = \lambda_{n[i}^{1}\lambda_{|1|j]}^{v};\ R_{nij}^{n} = b_{pq}^{n}\lambda_{n[i}^{p}\delta_{j]}^{q} + b_{11}^{n}\lambda_{n[i}^{1}\delta_{j]}^{1}. \end{cases} \tag{21}$$

Теорема 5. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенная гиперполоса* SH_m *внутренним образом порождает нормальную центроаффинную связность* $\psi^{\perp}$ *в расслоении* $N_{n-1}(V_m)$ *нормалей 1-го рода* Δ^{*}*-подрасслоения с формами связности* $\{\omega_{\hat{u}}^{\hat{v}}\}$ *и 2-формами кривизны* $\{\Omega_{\hat{u}}^{\hat{v}}\}$ *(20), компоненты тензора кривизны* $R_{\hat{u}kl}^{\hat{v}}$ *которой имеют строение (21).*

Список литературы

1. *Попов Ю.И.* Нормализации гиперполосы SH_m // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2012. Вып. 10. С. 131—141.

2. *Чакмазян А.В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий : монография. Ереван, 1990.

3. *Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. Семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т. 4. С. 7—70.

4. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

5. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос аффинного пространства : учебное пособие. Калининград, 2001.

Yu. Popov

Connections on a framed regular hyperband SH_m

This article is a continuation of [1]. Internal affine and normal center-affine connections introduced respectively in tangent and normal subbundle associated with hyperbands field of normals on a rigged first kind hyperstrip SH_m.