ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

В.Р.Рютин

НОРМАЛЬНЫЕ КОНГРУЭНЦИИ ПАРАБОЛ n-го ПОРЯДКА

Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве класс конгруэнций парабол порядка $n \geqslant 3$, допускающих однопараметрическое семейство поверхностей, ортогональных к параболам конгруэнции. Такие конгруэнции в дальнейшем будем называть нормальными конгруэнциями парабол n-го порядка.

В репере $\{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, где вершина расположена в фокусе параболы, вектор $\vec{e}_1$ направлен вдоль оси, а вектор $\vec{e}_3$ перпендикулярен плоскости параболы, уравнения параболы n-го порядка имеют вид:

$$(x^2)^n - p(2x^1 + p) = 0, \quad x^3 = 0. \tag{1}$$

В нормальной конгруэнции каждая точка $\vec{M} = \vec{A} + x^2\vec{e}_2 + \frac{1}{2p}\left((x^2)^n - p^2\right)\vec{e}_1$ параболы описывает ортогональную к параболе в этой точке поверхность, поэтому

$$\theta = d\vec{M} \cdot \vec{\varepsilon} = 0, \tag{2}$$

где вектор $\vec{\varepsilon} = n(x^2)^{n-1}\vec{e}_1 + 2p\vec{e}_2$ касается параболы (1) в точке M. При $n \geqslant 3$ условие полной интегрируемости $\theta \wedge d\theta = 0$ уравнения (2) приведется к следующей системе квадратичных уравнений:

$$\begin{gathered}\omega_1^2 \wedge dp = 0, \quad \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = 0, \quad \omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^3 \wedge \omega_3^2 = 0, \quad \omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1 = 0, \\ \omega^2 \wedge (dp - 2\omega^1) + p\omega_1^2 \wedge \omega^1 = 0, \quad (n-1)p\omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^1 \wedge dp = 0, \\ 2\omega^2 \wedge dp + 2(2n-1)p\omega_1^2 \wedge \omega^1 - 2np\omega^3 \wedge \omega_3^2 = 0,\end{gathered} \tag{3}$$

откуда следует, что формы ω_1^2, ω^1 и ω^2 являются полными дифференциалами, т.е. $\omega_1^2 = d\varphi$, $\omega^1 = du$, $\omega^2 = dw$.

Применяя лемму Картана к уравнениям системы (3), получаем

$$dp = \alpha\, du, \quad dw = \beta\, du, \quad d\varphi = \gamma\, du, \quad \omega_1^3 = \lambda\omega^3, \quad \omega_2^3 = \mu\omega^3, \tag{4}$$

формы ω^1, ω^3 — главные. Из (4) следует, что нормальные конгруэнции парабол n-го порядка $(n \geqslant 3)$ существуют и определяются с произволом пяти функций одного аргумента и обладают следующими геометрическими свойствами: 1/вектор $\vec{e}_3$ касается линий семейства $u = \mathrm{const}$, принадлежащих поверхности (A), вдоль каждой из этих линий параметр p параболы остается неизменным; 2/плоскости парабол конгруэнции образуют развертывающуюся поверхность с характеристикой, определяемой уравнениями $1 + \lambda x^1 + \mu x^2 = 0$, $x^3 = 0$; 3/двумя семействами линий кривизны на поверхности (A) являются линии $u = \mathrm{const}$ и $\omega^3 = 0$, причем последние принадлежат плоскостям парабол конгруэнции.

Система квадратичных уравнений, определяющих нормальные конгруэнции обычных парабол $(n=2)$, имеет вид:

$$\begin{gathered}\omega_1^2 \wedge dp - 2p\omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = 0, \quad \omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1 = 0, \\ 2p(\omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^3 \wedge \omega_3^2) + \omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \quad \omega^1 \wedge dp - p\omega^2 \wedge \omega_2^1 = 0, \\ \omega^2 \wedge dp - p\omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^1 \wedge \omega^2 = 0,\end{gathered} \tag{5}$$

откуда получаем

$$\begin{gathered}dp = \alpha\, du + p(\beta_1\gamma - \beta\gamma_1)\omega^3; \quad \omega^2 = \beta\, du + \beta_1\omega^3, \quad \omega_1^2 = \gamma\, du + \gamma_1\omega^3, \\ \omega_1^3 = (\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma)\, du + \lambda\omega^3, \quad \omega_2^3 = -\left(\frac{1}{2p}\beta_1 + \gamma_1\right) du + \mu\omega^3,\end{gathered} \tag{6}$$

где коэффициенты разложений удовлетворяют соотношениям $p(\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma)(2\mu - \gamma) + (2p\gamma_1 - \beta_1)\gamma_1 = 0$, $p\beta(\beta_1\gamma - \beta\gamma_1) - (\alpha - 1)\beta_1 - p\gamma_1 = 0$. Из (6) следует, что произвол существования конгруэнций парабол второго порядка тот же, что и в случае порядка $n \geqslant 3$. Для того, чтобы систему уравнений (6) привести к системе (4), достаточно положить $\beta_1 = \gamma_1 = 0$, следовательно, класс нормальных конгруэнций парабол второго порядка шире, чем класс нормальных конгруэнций парабол порядка выше второго.

Список литературы

1. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М.-Л., 1948.