Доказательство. Из формул (5) следует, что характеристическим признаком двукратности одной из фокальных точек (5) является равенство $b_1^2 b_2^1 = 0$, что приводит к совпадению одной из пар прямых Демулена.

В частности, для пары поверхностей Годо, т.е. при $b_1^2 - b_2^1 = 0$, все четыре фокальные поверхности $M_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ сливаются в одну – поверхность (A_3).

Список литературы

1. Фиников С.П. Проективно-дифференциальная геометрия ОНТИ. М.-Л., 1937.

2. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве. – Тр. геометр. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, с. 113–136.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 14 1983

УДК 514.75

С.В. Мациевский

КОМПЛЕКС ЛИНЕЙЧАТЫХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ КВАДРИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассмотрен комплекс K линейчатых невырожденных квадрик Q. Найден характеристический признак класса с непустым фокальным многообразием квадрики Q и показано, что в общем случае существует сдвоенная фокальная точка. Показано, что рассматривать фокальные точки порядка выше второго не имеет смысла. Исследован класс с фокальным автополярным тетраэдром.

1. Комплекс с непустым фокальным многообразием.

Отнесем пространство P_3 к реперу $R \equiv \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$. Уравнение квадрики Q и систему пфаффовых уравнений комплекса можно привести к виду: $F \equiv x^1x^2 - x^0x^3 = 0$,

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1^0 - \omega_3^2 = b_{1i}\omega^i, \quad \omega_2^0 - \omega_3^1 = b_{2i}\omega^i, \quad \omega_0^3 = a_{0i}\omega^i, \\ &-\omega_1^2 = a_{1i}\omega^i; \quad -\omega_2^1 = a_{2i}\omega^i, \quad \omega_3^0 = a_{3i}\omega^i, \quad (i = 0,1,2) \end{aligned}\right\} \quad (1.1)$$

где $\omega^0 \equiv \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3$, $\omega^1 \equiv \omega_2^3 - \omega_0^1$, $\omega^2 \equiv \omega_1^3 - \omega_0^2$.

Фокальное многообразие квадрики Q (см. [2])

$$\left.\begin{aligned} &F_0 \equiv \tfrac{1}{2}x^1x^2 + \tfrac{1}{2}x^0x^3 + a_{\alpha 0}(x^\alpha)^2 + b_{\tau 0}x^\tau x^3 = 0, \\ &F_1 \equiv x^0x^2 + a_{\alpha 1}(x^\alpha)^2 + b_{\tau 1}x^\tau x^3 = 0, \\ &F_2 \equiv x^0x^1 + a_{\alpha 2}(x^\alpha)^2 + b_{\tau 2}x^\tau x^3 = 0, \\ &F \equiv x^1x^2 - x^0x^3 = 0 \qquad (\alpha = 0,1,2,3;\ \tau = 1,2) \end{aligned}\right\} \quad (1.2)$$

в общем случае является пустым множеством.

Определение 1.1. Комплексом K_1 называется комплекс K, текущая квадрика Q которого обладает одной фокальной точкой.

Т е о р е м а 1.1. Комплекс K_1 существует и имеет характеристическое свойство: на квадрике Q существует инвариантная точка, описывающая поверхность, касающуюся квадрики Q в той же точке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поместим вершину A_0 в фокальную точку квадрики Q. Существование комплекса обеспечивает его система пфаффовых уравнений:

$$\omega_0^3=0,\ \omega_3^0=a_{3i}\omega^i;\ -\omega_p^q=a_{pi}\omega^i,\ \omega_0^p=c_p\omega^1+c_q\omega^2;\ \omega_p^0-\omega_3^q=b_{pi}\omega^i.$$

($p,q=1,2$, $p\neq q$; по p,q не суммировать).

С л е д с т в и е. Комплекс огибает поверхность, описанную фокальной точкой квадрики Q, касаясь этой поверхности в этой точке.

О п р е д е л е н и е 1.2. Комплексом K_{12} называется комплекс K_1, текущая квадрика которого обладает фокальной точкой второго ранга (см.[2]).

Т е о р е м а 1.2. Комплекс K_{12} существует с характеристическим свойством: фокальная точка второго ранга неподвижна.

С л е д с т в и е. Поскольку неподвижная фокальная точка – любого ранга, то рассматривать фокальную точку ранга выше второго не имеет смысла.

Л е м м а 1.3. Фокальная точка тогда и только тогда сдвоенная (см.[2]), когда $a_{11}=a_{22}=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A_0 – фокальная точка. Переходя к неоднородным координатам в системе (1.2) $\xi^p=\frac{x^p}{x^0}$, $\xi^3=\frac{x^3}{x^0}$, подставляя первое уравнение полученной системы $\xi^3=\xi^1\xi^2$ в остальные и исключая с помощью результанта двух многочленов от нескольких неизвестных (см.[3]) из последних трех уравнений неизвестные ξ^p, получаем систему из шести однородных уравнений, кратность нулевого решения которой совпадает с кратностью фокальной точки:

$$\left.\begin{aligned}&a_{q0}^2(\xi^p)^2+\varphi(\xi^p)=0,\quad a_{p0}a_{q0}(\xi^p)^2+\varphi(\xi^p)=0,\\&a_{qq}\xi^p+(b_{qq}+a_{qp}^2-a_{pp}a_{qq}a_{qp})(\xi^p)^2+\varphi(\xi^p)=0,\end{aligned}\right\}\quad(1.3)$$

где φ – многочлены со степенями одночленов не ниже трех.

Л е м м а 1.4. Если $a_{p0}=0$, то прямая (A_0A_p) образует прямолинейную конгруэнцию. Обратное верно, если поверхность (A_0) не вырождается в плоскость или точку.

Т е о р е м а 1.5. Среди фокальных точек квадрики Q комплекса K таких, что проходящие через них прямолинейные образующие квадрики Q образуют прямолинейные комплексы, хотя бы одна сдвоенная, но не строенная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем: $\delta a_{pp}=a_{pp}\pi_3^3-2a_{q0}\pi_3^q$. По лемме Н.М.Остиану , $a_{pp}=0$ есть канонизация репера, если $a_{q0}\neq 0$, что является необходимым условием невырожденности прямолинейного комплекса, образованного прямой (A_0A_q), в конгруэнцию. При $a_{q0}\neq 0$ из системы (1.3) следует, что фокальная точка A_0 не может быть трехкратной.

С л е д с т в и е. Если фокальное многообразие квадрики Q состоит из одной точки, то эта фокальная точка сдвоенная и только сдвоенная, если прямолинейные образующие квадрики Q, пересекающиеся в этой точке, образуют прямолинейные комплексы. Обратное утверждение имеет место, если сдвоенная фокальная поверхность не вырождается в плоскость или точку.

2. Рассмотрим комплекс с автополярным фокальным тетраэдром.

О п р е д е л е н и е 2.1. Комплексом K_4 называется комплекс K_1 такой, что: 1/ на квадрике Q имеются две фокальные несопряженные точки; 2/ прямолинейные образующие, проходящие через эти две фокальные точки, пересекаются в фокальных точках.

Поместим вершины репера в фокальные точки квадрики.

Т е о р е м а 2.1. Комплекс K_4 существует, определяется с произволом двух функций трех аргументов и обладает свойствами: 1/ фокальные точки A_α пробегают одну линейчатую квадрику Q_4: $F_4\equiv(c+1)x^1x^2-c\,x^0x^3=0$; 2/ фокальные точки A_α простые.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Комплекс K_4 определяется пфаффовой системой $\omega_0^3=0$, $\omega_1^2=0$, $\omega_2^1=0$, $\omega_3^0=0$, $\omega_0^p=c\omega^p$, $dc=c(c+1)\omega^0$, $\omega_3^p=c(\omega^0+b_{p\tau}\omega^\tau)$, $\omega_p^0=(c+1)(\omega^0+b_{p\tau}\omega^\tau)$. Кратность фокальной точки A_0 определяется системой

$$(\xi^p)^4(1+b_{qq}+\xi^p\cdot\varphi(\xi^p))=0,\ (\xi^p)^2(b_{qq}+(\xi^p)^2\cdot\varphi(\xi^p))=0,$$

где φ -многочлены.

Определение 2.2. Комплекс K_4 называется комплексом K_{40} (K_{41}), если квадрика Q_4 распадается на пару плоскостей с осью (A_0A_3) $((A_1A_2))$.

Теорема 2.2. Комплекс K_{40} (K_{41}) существует и обладает характеристическими свойствами: 1/ (A_0) -точка (плоскость); 2/ (A_1) -плоскость (точка); 3/ (A_2) -плоскость (точка); 4/ (A_3) -точка (плоскость).

Рассмотрим инвариантные квадрики Q_p: $F_p=0$.

Определение 2.3. Если точка A_0 двукратная, то комплекс K_4 называется комплексом K_4^4.

Теорема 2.3. Комплекс K_4^4 существует, определяется с произволом двух функций двух аргументов и имеет характеристическое свойство: квадрики Q_p вырождаются, но не распадаются на пары плоскостей.

Определение 2.4. Если фокальная точка A_3 многократная, то комплекс K_4 назовем комплексом K_4^2.

Теорема 2.4. Комплекс K_4^2 существует, определяется с произволом одной функции трех аргументов и имеет характеристическое свойство: поверхность (A_3) вырождается в линию.

Определение 2.5. Комплекс K_4^2 с трехкратной фокальной точкой A_3 называется комплексом K_4^3.

Теорема 2.5. Комплекс K_4^3 существует, определяется с произволом двух функций одного аргумента и обладает характеристическим свойством: квадрики Q_p распадаются на пары плоскостей с осями (A_pA_3).

Из теорем существования получаем: при увеличении количества фокальных точек на t единиц высший произвол существования соответствующего класса, как правило, уменьшается не на t единиц.

Теорема 2.6. Квадрика Q комплекса K_4^3 имеет, с учетом кратности, 6 и только 6 фокальных точек.

Доказательство следует из анализа системы (I.2) в случае комплекса K_4^3.

Список литературы

I. Малаховский В.С. Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978, ч. I; 1980, ч. 2.

2. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.-В кн.: Труды геометр. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1974, т.6, с. II3-I34.

3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., 1975.