УДК 514.75(08)

Ю.И. Попов

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Поля геометрических объектов $\mathcal{H}$-распределения аффинного пространства

Построены поля инвариантных нормализаций в смысле Нордена основных структурных подрасслоений гиперполосного распределения ($\mathcal{H}$-распределения) аффинного пространства A_n в дифференциальных окрестностях 1-го и 2-го порядков. В дифференциальной окрестности 2-го порядка введены нормализации Остиану — Алшибая соответственно Λ-, L-, H-подрасслоений данного $\mathcal{H}$-распределения. Выяснен геометрический смысл нормали $\vec{P}$ 1-го рода H-подрасслоения: вдоль кривой, касающейся нормали $\vec{P}$, нормаль $\vec{V}$ переносится параллельно.

Ключевые слова: распределение, тензор, квазитензор, нормаль подрасслоения, нормализация, соответствия Бомпьяни — Пантази.

Во всей работе использована следующая схема индексов: $I,K,L=\overline{1,n}$; $\alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1}$; $a,b,c=\overline{1,n-1}$; $i,j,k=\overline{1,m}$; $\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}=\overline{m+1,n}$.

1. Поля нормализаций и пучки нормалей 1-го и 2-го рода Нордена основных структурных подрасслоений $\mathcal{H}$-распределения в дифференциальной окрестности 1-го порядка

1. Рассмотрим n-мерное аффинное пространство A_n, отнесенное к подвижному реперу $(A,\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n)$, дифференциальные уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид

$$d\vec{A}=\omega^I\vec{e}_I;\ d\vec{e}_I=\omega_I^K\vec{e}_K, \tag{1}$$

а инвариантные формы ω^I и ω_I^K аффинной группы преобразований удовлетворяют структурным уравнениям аффинного пространства

$$d\omega^I=\omega^L\wedge\omega_L^I,\ d\omega_I^K=\omega_I^L\wedge\omega_L^K. \tag{2}$$

Известно [1], что в дифференциальной окрестности 2-го порядка регулярное $\mathcal{H}$-распределение аффинного пространства A_n задается относительно репера R^1 уравнениями

$$\omega_i^n=\Lambda_{iL}^n\omega^L,\ \omega_i^\alpha=\Lambda_{iL}^\alpha\omega^L,\ \omega_\alpha^n=\Lambda_{\alpha\hat\beta}^n\omega^{\hat\beta},\ \omega_\alpha^i=\Lambda_{\alpha L}^i\omega^L, \tag{3}$$

где функции в системе (3) удовлетворяют уравнениям

$$\nabla\Lambda_{ij}^n=\Lambda_{ijK}^n\omega^K,\ \nabla\Lambda_{i\alpha}^n=\Lambda_{i\alpha K}^n\omega^K,\ \nabla\Lambda_{\alpha\beta}^n=\Lambda_{\alpha\beta K}^n\omega^K, \tag{4}$$

$$\begin{cases}\nabla\Lambda_{in}^n-\Lambda_{ij}^n\omega_n^j-\Lambda_{i\alpha}^n\omega_n^\alpha=\Lambda_{inK}^n\omega^K, \nabla\Lambda_{\alpha n}^n-\Lambda_{\alpha\beta}^n\omega_n^\beta=\Lambda_{\alpha nK}^n\omega^K,\\ \nabla\Lambda_{\alpha j}^i=\Lambda_{\alpha jK}^i\omega^K, \nabla\Lambda_{\alpha\beta}^i+\Lambda_{\alpha\beta}^n\omega_n^i=\Lambda_{\alpha\beta K}^i\omega^K,\\ \nabla\Lambda_{\alpha n}^i-\Lambda_{\alpha j}^i\omega_n^j-\Lambda_{\alpha\beta}^i\omega_n^\beta+\Lambda_{\alpha n}^\beta\omega_n^i=\Lambda_{\alpha nK}^i\omega^K,\\ \nabla\Lambda_{ij}^\alpha+\Lambda_{ij}^\alpha\omega_n^\alpha=\Lambda_{ijK}^\alpha\omega^K, \nabla\Lambda_{i\beta}^\alpha+\Lambda_{i\beta}^n\omega_n^\alpha=\Lambda_{i\beta K}^\alpha\omega^K,\\ \nabla\Lambda_{in}^\alpha-\Lambda_{ij}^\alpha\omega_n^j-\Lambda_{i\beta}^\alpha\omega_n^\beta+\Lambda_{in}^n\omega_n^\alpha=\Lambda_{inK}^\alpha\omega^K\end{cases} \tag{5}$$

и соотношениям

$$\Lambda_{\alpha n}^n\Lambda_{[jk]}^n+\Lambda_{\alpha\beta}^n\Lambda_{[jk]}^\beta+\Lambda_{i[j}^n\Lambda_{|\alpha|k]}^i=0.$$

Заметим, что коэффициенты в правых частях уравнений (4), (5), вообще говоря, не симметричны по нижним индексам.

Из уравнений (4) следует, что совокупность функций $\{\Lambda_{ab}^n\}\overset{def}{=}\{\Lambda_{ij}^n;\Lambda_{i\alpha}^n;\Lambda_{\alpha\beta}^n\}$ образует тензор 1-го порядка:

$$\nabla\Lambda_{ab}^n=\Lambda_{abK}^n\omega^K. \tag{6}$$

Для регулярного $\mathcal{H}$-распределения фундаментальные тензоры $\{\Lambda_{ij}^n\}$, $\{\Lambda_{\alpha\beta}^n\}$, $\{\Lambda_{ab}^n\}$ невырожденные [1] и потому имеют соответственно обращенные фундаментальные тензоры 1-го порядка $\{\Lambda_n^{jk}\}$, $\{\Lambda_n^{\beta\gamma}\}$, $\{\Lambda_n^{bc}\}$, компоненты которых удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla\Lambda_n^{ij} = \Lambda_{nL}^{ij}\omega^L,\ \nabla\Lambda_n^{\alpha\beta} = \Lambda_{nL}^{\alpha\beta}\omega^L,\ \nabla\Lambda_n^{ab} = \Lambda_{nL}^{ab}\omega^L \tag{7}$$

и соотношениям

$$\Lambda_{ij}^n\Lambda_n^{jk} = \delta_i^k;\ \Lambda_{\alpha\beta}^n\Lambda_n^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma;\ \Lambda_{ab}^n\Lambda_n^{bc} = \delta_a^c .$$

2. Для дальнейшего изложения приведем соотношения [2], определяющие биекции Бомпьяни — Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода соответственно H-, L-, Λ-подрасслоений данного $\mathcal{H}$ -распределения

$$\nu_n^c = -\Lambda_n^{ca}\nu_a + \mathscr{A}_n^c\ (a),\ \nu_a = -\Lambda_{ab}^n\nu_n^b - \mathscr{A}_a\ (б), \tag{8}$$

$$\nu_n^\alpha = -\Lambda_n^{\alpha\beta}\nu_\beta + \mathscr{A}_n^\alpha\ (a),\ \nu_\alpha = -\Lambda_{\alpha\beta}^n\nu_n^\beta - \mathscr{A}_\alpha\ (б), \tag{9}$$

$$\nu_n^i = -\Lambda_n^{ij}\nu_j + \mathscr{A}_n^i\ (a),\ \nu_i = -\Lambda_{ij}^n\nu_n^j - \widetilde{\mathscr{A}}_i\ (б), \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\nabla\nu_n^c + \omega_n^c = \nu_{nK}^c\omega^K, \nabla\nu_a = \nu_{aK}\omega^K,\\ \nabla\nu_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \nu_{nK}^\alpha\omega^K, \nabla\nu_\alpha = \nu_{\alpha K}\omega^K,\\ \nabla\nu_n^i + \omega_n^i = \nu_{nK}^i\omega^K, \nabla\nu_i = \nu_{iK}\omega^K,\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{cases}\mathscr{A}_n^c = -\Lambda_n^{ca}\mathscr{A}_a, \nabla\mathscr{A}_n^c + \omega_n^c = \mathscr{A}_{nK}^c\omega^K (a),\\ \mathscr{A}_n^\alpha = -\Lambda_n^{\alpha\beta}\mathscr{A}_\beta, \nabla\mathscr{A}_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \mathscr{A}_{nK}^\alpha\omega^K,\\ \mathscr{A}_n^i = -\Lambda_n^{ia}\Lambda_{na}^n, \nabla\mathscr{A}_n^i + \omega_n^i = \mathscr{A}_{nK}^i\omega^K,\end{cases} \tag{12}$$

$$\mathscr{A}_a \overset{def}{=} \Lambda_{an}^n,\ \nabla\mathscr{A}_a = \Lambda_{ab}^n\omega_n^b + \mathscr{A}_{aK}\omega^K . \tag{13}$$

3. В силу уравнений (5), (7) убеждаемся, что функции

$$V_n^\alpha \overset{def}{=} \frac{1}{m}\Lambda_{ij}^\alpha\Lambda_n^{ji} \tag{14}$$

удовлетворяют уравнениям

$$\nabla V_n^\alpha + \omega_n^\alpha = V_{nK}^\alpha\omega^K . \tag{15}$$

Следовательно, поле квазитензора $\{V_n^\alpha\}$ (15) задает поле нормалей 1-го рода V_{m+1} L-подрасслоения в дифференциальной окрестности 1-го порядка.

Используя биекцию (9б), находим соответствующее поле нормалей 2-го рода L-подрасслоения

$$V_\alpha \overset{def}{=} -\Lambda^n_{\alpha\beta} V_n^\beta - A_\alpha\,,\ \nabla V_\alpha = V_{\alpha K}\omega^K \tag{16}$$

Далее с помощью объекта $\{V_n^\alpha\}$ (14) построим тензоры $\{V^\alpha_{i\beta}\}$ и $\{V_i\}$, где

$$V^\alpha_{i\beta} = \Lambda^\alpha_{i\beta} - \Lambda^n_{i\beta} V^\alpha_n\,,\ \nabla V^\alpha_{i\beta} \equiv 0\,;$$

$$V_i \overset{def}{=} -\frac{1}{n-m-1} V^\alpha_{i\alpha}\,, \nabla V_i = V_{iK}\omega^K\,. \tag{17}$$

Полю нормалей 2-го рода $\{V_i\}$ (17) в силу биекции (10*а*) соответствует поле нормалей 1-го рода $\{V_n^i\}$ Λ-подрасслоения

$$V_n^i = -\Lambda^{ij}_n V_j + \mathscr{A}^i_n\,,\ \nabla V^i_n + \omega^i_n = V^i_{nK}\omega^K\,.$$

В дифференциальной окрестности 1-го порядка введем функции

$$V_n^a \overset{def}{=} \{V_n^i, V_n^\alpha\}\,,\ V_a \overset{def}{=} \{V_i, V_\alpha\}\,, \tag{18}$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\nabla V_n^a + \omega_n^a = V^a_{nK}\omega^K\ (a),\ \nabla V_a = V_{aK}\omega^K\,. \tag{19}$$

Отметим, что геометрические объекты (18) соответствуют друг другу в биекции Бомпьяни — Пантази (8).

4. Для Н-подрасслоения гиперполосного $\mathscr{H}$-распределения справедливо предложение, доказанное для гиперплоскостного распределения аффинного пространства A_n Э. Д. Алшибая [3].

Теорема 1. *Однопараметрическому пучку нормалей первого рода $(\vec{v}(\varepsilon), \vec{A})$, определенному в данной точке А Н-подрасслоения (ε-параметр), в биекции Бомпьяни — Пантази (8б) соответствует* *однопараметрический пучок параллельных (n-2)-плоскостей (пучок нормалей 2-го рода), лежащих в плоскости H(A).*

Покажем, что аналогичное соответствующее предложение имеет место и для L-, Λ-подрасслоений данного $\mathcal{H}$-распределения пространства A_n. Пусть, например, в центре А $\mathcal{H}$-распределения задан пучок нормалей 1-го рода $\{\nu_n^\beta(\sigma)\}$ L-подрасслоения в смысле Нодена:

$$\nu_n^\beta(\sigma) = \mathscr{A}_n^\beta + \sigma(\nu_n^\beta - \mathscr{A}_n^\beta), \tag{20}$$

где объект $\{\nu_n^\beta\}$ задает произвольную инвариантную нормаль $N_{m+1}(A)$ плоскости L(A). В силу формул (9*a*) пучку (20) в биекции (9б) соответствует пучок нормалей 2-го рода в смысле Нордена следующего вида

$$\begin{aligned}\nu_\alpha(\sigma) &= -\Lambda_{\alpha\beta}^n(\mathscr{A}_n^\beta + \sigma(\nu_n^\beta - \mathscr{A}_n^\beta)) - \mathscr{A}_\alpha = -\Lambda_{\alpha\beta}^n\mathscr{A}_n^\beta + \\ &+ \sigma\Lambda_{\alpha\beta}^n\Lambda_n^{\beta\gamma}\nu_\gamma - \mathscr{A}_\alpha = \sigma\nu_\alpha,\end{aligned} \tag{21}$$

то есть пучок параллельных (n-m-2)-плоскостей, лежащих в плоскости $L_{n-m-1}(A)$.

Теорема 2. *Однопараметрическому пучку нормалей 1-го рода (20) L-подрасслоения в биекции Бомпьяни — Пантази соответствует однопараметрический пучок параллельных (n-m-2)-плоскостей (21) — нормалей 2-го рода Нордена L-подрасслоения.*

Аналогичное утверждение имеет место и для Λ-подрасслоения.

Теорема 3. *Однопараметрическому пучку* $\nu_n^i(\sigma) = \mathscr{A}_n^i + \sigma(\nu_n^i - \mathscr{A}_n^i)$ *нормалей 1-го рода в смысле Нордена Λ-подрасслоения в биекции Бомпьяни — Пантази соответствует однопараметрический пучок параллельных (m-1)-плоскостей* $\nu_i(\sigma) = \sigma\nu_i$ *нормалей 2-го рода в смысле Нордена Λ-подрасслоения.*

5. Квазитензоры $\{\mathscr{A}_n^a\}$ (12), $\{V_n^a\}$ (19) в общем случае функционально независимы и поэтому определяют в дифференциальной окрестности 1-го порядка в каждом центре А однопараметрический пучок нормалей 1-го рода Н-подрасслоения

$$\mathscr{V}_n^a(\varepsilon)=V_n^a+\varepsilon(\mathscr{A}_n^a-V_n^a)\,, \tag{22}$$

которым в биекции (8б) согласно теореме 1 соответствует пучок параллельных $(n-2)$-плоскостей (нормалей 2-го рода H-подрасслоения)

$$\mathscr{V}_a(\varepsilon)=\varepsilon\cdot\mathscr{V}_a\,, \tag{23}$$

где

$$\mathscr{V}_a(\varepsilon)=V_a+\varepsilon(\mathscr{A}_a-V_a)\,,\ \nabla\mathscr{V}_a=\mathscr{V}_{aK}\omega^K\,.$$

Пучки (22) и (23) порождают пучки нормалей 1-го и 2-го рода L-, Λ-подрасслоений в смысле Нордена

$$\mathscr{V}_n^\alpha(\varepsilon)=V_n^\alpha+\varepsilon(\mathscr{A}_n^\alpha-V_n^\alpha)\,,\ \mathscr{V}_\alpha(\varepsilon)=\varepsilon\cdot\mathscr{V}_\alpha\,;$$
$$\mathscr{V}_n^i(\varepsilon)=V_n^i+\varepsilon(\mathscr{A}_n^i-V_n^i)\,,\ \mathscr{V}_i(\varepsilon)=\varepsilon\cdot\mathscr{V}_i\,.$$

Здесь введены функции

$$\mathscr{V}_\alpha(\varepsilon)=V_\alpha+\varepsilon(\mathscr{A}_\alpha-V_\alpha)\,,\ \nabla\mathscr{V}_\alpha=\mathscr{V}_{\alpha K}\omega^K\,;$$
$$\mathscr{V}_i(\varepsilon)=V_i+\varepsilon(\mathscr{A}_i-V_i)\,,\ \nabla\mathscr{V}_i=\mathscr{V}_{iK}\omega^K\,.$$

Теорема 4. *Пучки нормалей 1-го рода* $(\mathscr{A}_n^a;V_n^a)$, $(\mathscr{A}_n^\alpha;V_n^\alpha)$, $(\mathscr{A}_n^i;V_n^i)$ *и 2-го рода* $(\mathscr{A}_a;V_a)$, $(\mathscr{A}_\alpha;V_\alpha)$, $(\mathscr{A}_i;V_i)$ *Нордена соответственно H-, L-, Λ-подрасслоений, а также их нормализации*

$$(V_n^a;V_a),\ (V_n^\alpha;V_\alpha),\ (V_n^i;V_i)$$

внутренним инвариантным образом $\mathscr{H}$ *-распределение порождает в дифференциальной окрестности 1-го порядка.*

2. Построение полей геометрических объектов 2-го порядка, ассоциированных с оснащенным H-подрасслоением

1. Пусть H-подрасслоение оснащено полем нормалей Алшибая $\vec{\mathscr{A}}(\mathscr{A}_n^a)$, заданном в окрестности 1-го порядка уравнениями (12*a*). Продолжение уравнений (12*a*) с учетом (2) и (3) приводит к уравнениям

$$d\mathscr{A}^a_{nK} + \mathscr{A}^b_n \Lambda^n_{bK}\omega^a_n + \mathscr{A}^a_n \Lambda^n_{bK}\omega^b_n \equiv 0\,, \tag{24}$$

которым удовлетворяют функции $\mathscr{A}^a_{nK}$ 2-го порядка. Распишем более подробно (при K = b, K = n) уравнения (24):

$$\nabla\mathscr{A}^a_{nb} + \mathscr{A}^b_n \Lambda^n_{cb}\omega^c_n + \mathscr{A}^c_n \Lambda^n_{cb}\omega^a_n \equiv 0\,, \tag{25}$$

$$\nabla\mathscr{A}^a_{nn} \equiv (\mathscr{A}^a_{nb} - \mathscr{A}^a_n \Lambda^n_{bn} - \delta^a_b \mathscr{A}^c_n \Lambda^n_{cn})\omega^b_n \equiv 0\,. \tag{26}$$

В силу (12*a*), (25), (6) убеждаемся, что функции

$$A^a_{nb} \overset{def}{=} \mathscr{A}^a_{nb} - \mathscr{A}^a_n \mathscr{A}^c_n \Lambda^n_{cb} \tag{27}$$

удовлетворяют уравнениям

$$\nabla A^a_{nb} = A^a_{nbK}\omega^K\,,$$

то есть совокупность функций $\{A^a_{nb}\}$ образует тензор 2-го порядка. В общем случае

$$K \overset{def}{=} det\left\|A^a_{nb}\right\| \neq 0\,,$$

что позволяет для тензора $\{A^a_{nb}\}$ ввести обращенный тензор $\{A^{cn}_b\}$, удовлетворяющий условиям

$$A^a_{nc}A^{cn}_b = \delta^a_b\,,\ A^c_{nb}A^{an}_c = \delta^a_b\,,\ \nabla A^{cn}_b = A^{cn}_{bK}\omega^K\,. \tag{28}$$

Кроме того, будем считать, что след тензора $\{A^a_{nb}\}$ (27) отличен от нуля, то есть

$$\mathscr{H} \overset{def}{=} -\frac{1}{n-1}A^a_{na} \neq 0\,.$$

Дифференциальные уравнения для величин K и $\mathscr{H}$ имеют вид

$$d\,ln\,K - (n-1)\omega^n_n = K_K\omega^K\,,$$

$$d\,ln\mathscr{H} - \omega^n_n = \mathscr{H}_K\omega^K\,.$$

Следовательно, величины K и $\mathscr{H}$ являются относительными инвариантами 2-го порядка, а отношение

$$S = \frac{K}{\mathscr{H}^{n-1}}$$

— абсолютный инвариант 2-го порядка

$$d\ln S = S_K \omega^K. \tag{29}$$

2. В общем случае определитель

$$\widetilde{K} \overset{def}{=} det\left\| A_b^{cn} \right\| \neq 0$$

и след тензора $\{A_b^{cn}\}$ (28) отличен от нуля, то есть

$$\widetilde{\mathcal{H}} = -\frac{1}{n-1} A_b^{bn} \neq 0.$$

Величины $\widetilde{K}$ и $\widetilde{\mathcal{H}}$ являются относительными инвариантами 2-го порядка

$$\begin{cases} d\ln\widetilde{K} - (n-1)\omega_n^n = \widetilde{K}_K \omega^K, \\ d\ln\widetilde{\mathcal{H}} - \omega_n^n = \widetilde{\mathcal{H}}_K \omega^K, \end{cases}$$

а их отношение $\widetilde{S} = \dfrac{\widetilde{K}}{\widetilde{\mathcal{H}}^{n-1}}$ есть абсолютный инвариант 2-го порядка

$$d\ln\widetilde{S} = \widetilde{S}_K \omega^K. \tag{30}$$

Из (29) и (30) следует, что величина

$$S_0 = S \cdot \widetilde{S}, \; d\ln S_0 = (S_K + \widetilde{S}_K)\omega^K,$$

— абсолютный инвариант 2-го порядка.

3. Введем в рассмотрение функции

$$Q_n^a \overset{def}{=} -A_b^{cn} A_{nn}^b, \tag{31}$$

где

$$A_{nn}^b \overset{def}{=} A_{nn}^b - A_n^a A_n^c \Lambda_{cn}^n, \; \nabla A_{nn}^b \equiv A_{nc}^b \omega_n^c. \tag{32}$$

Уравнения (32) следуют из (26), (12a) и (13). В силу уравнений (28), (32) имеем

$$\nabla Q_n^a + \omega_n^a = Q_{nK}^a \omega^K. \tag{33}$$

Таким образом, поле квазитензора $\{Q_n^a\}$ (33) задает поле нормалей 1-го рода Н-подрасслоения в дифференциальной окрестности 2-го порядка. Квазитензор $\{Q_n^a\}$ (31) для гиперплоскостных распределений аффинного пространства введен Э. Д. Алшибая [3—4], а для гиперплоскостных распределений проективного пространства ранее рассматривался Н. М. Остиану [5]. В силу этого поле нормалей $\vec{Q}$ 2-го порядка для Н-подрасслоения будем называть полем нормалей Остиану — Алшибая. Геометрический смысл нормали $\vec{Q}$ для гиперплоскостного распределения аффинного пространства найден в работе [3]: «Вдоль кривой, касающейся нормали $\vec{Q}$, нормаль $\vec{\mathscr{A}}$ (нормаль Алшибая) переносится параллельно».

Функции

$$Q_n^\alpha = -A_b^{\alpha n} A_{nn}^b,\ Q_n^i = -A_b^{in} A_{nn}^b \tag{34}$$

согласно уравнениям (24) удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\nabla Q_n^\alpha + \omega_n^\alpha = Q_{nK}^\alpha \omega^K, \nabla Q_n^i + \omega_n^i = Q_{nK}^i \omega^K. \tag{35}$$

Поля квазитензоров $\{Q_n^\alpha\}$ и $\{Q_n^i\}$ (35) задают соответственно поля нормалей 1-го рода L-, Λ-подрасслоений, которые будем называть полями нормалей Остиану — Алшибая L-, Λ-подрасслоений. Квазитензорам (31), (34) в силу биекций Бомпьяни — Пантази (8) — (10) соответствуют тензоры 2-го порядка

$$\begin{cases} q_a = -\Lambda_{ab}^n Q_n^b - \mathscr{A}_a, q_\alpha = -\Lambda_{\alpha\beta}^n Q_n^\beta - \mathscr{A}_\alpha, \\ q_i = -\Lambda_{ij}^n Q_n^j - \tilde{\mathscr{A}}_i, \end{cases}$$

где

$$\nabla q_a = q_{aK}\omega^K,\ \nabla q_\alpha = q_{\alpha K}\omega^K,\ \nabla q_i = q_{iK}\omega^K. \tag{36}$$

Поля (36) тензоров $\{q_a\}$, $\{q_\alpha\}$, $\{q_i\}$ задают соответственно поля нормалей 2-го рода Н-, L-, Λ-подрасслоений в дифференциальной окрестности 2-го порядка, которые назовем полями нормалей Остиану — Алшибая 2-го рода.

Резюмируя, приходим к следующему предложению.

Теорема 5. *Нормализации Остиану — Алшибая* $(Q_n^i; q_i)$, $(Q_n^\alpha; q_\alpha)$, $(Q_n^a; q_a)$ *соответственно Λ-, L-, H-подрасслоений данного* $\mathcal{H}$ *-распределения внутренним образом определены в дифференциальной окрестности 2-го порядка.*

4. Пусть теперь $\mathcal{H}$ -распределение оснащено полем нормалей 1-го рода $\vec{V}$ (19*a*). Замыкая уравнения (19*a*), с учетом (2), (3), (19*a*) получим дифференциальные уравнения на функции V_{nK}^a 2-го порядка

$$\nabla V_{nK}^a + V_n^a \Lambda_{bK}^n \omega_n^b + V_n^b \Lambda_{bK}^n \omega_n^a \equiv 0 .$$

Откуда при *К* = *b; К* = *n* находим

$$\nabla V_{nb}^a \equiv -V_n^a \Lambda_{cb}^n \omega_n^c - V_n^c \Lambda_{cb}^n \omega_n^a , \tag{37}$$

$$\nabla V_{nn}^a \equiv (V_{nb}^a - V_n^a \Lambda_{bn}^n - \delta_b^a V_n^c \Lambda_{cn}^n) \omega_n^b . \tag{38}$$

Построим тензор 2-го порядка $\{\vartheta_{nb}^a\}$, компоненты которого

$$\vartheta_{nb}^a = V_{nb}^a - V_n^a V_n^c \Lambda_{cb}^n , \tag{39}$$

в силу уравнений (37), (19*a*), (6), удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \vartheta_{nb}^a = \vartheta_{nbK}^a \omega^K . \tag{40}$$

Определитель тензора $\{\vartheta_{nb}^a\}$ (39) в общем случае отличен от нуля

$$K(\vartheta) = det\left\|\vartheta_{nb}^a\right\| \neq 0 .$$

Это позволяет вести обращенный ему тензор $\{\vartheta_c^{bn}\}$, компоненты которого удовлетворяют условиям

$$\vartheta_{nc}^a \vartheta_b^{cn} = \delta_b^a ;\ \vartheta_{nb}^c \vartheta_c^{an} = \delta_b^a ;.\ \nabla \vartheta_b^{an} = \vartheta_{bK}^{an} \omega^K . \tag{41}$$

Введем в рассмотрение функции 2-го порядка

$$\vartheta_{nn}^b = V_{nn}^b - V_n^b V_n^c \Lambda_{cn}^n ,$$

дифференциальные уравнения которых согласно (38), (19а), (13) имеют вид

$$\nabla \vartheta_{nn}^b = \vartheta_{nc}^b \omega_n^c + \vartheta_{nnK}^b \omega^K . \tag{42}$$

Наконец, согласно уравнениям (41), (42) убеждаемся, что функции

$$P_n^a = -\vartheta_b^{an}\vartheta_{nn}^b$$

образуют квазитензор $\{P_n^a\}$

$$\nabla P_n^a + \omega_n^a = P_{nK}^a\omega^K . \qquad (43)$$

Из (44) следует, что поле квазитензора $\{P_n^a\}$ 2-го порядка задает поле нормалей $\vec{P}$ 1-го рода Н-подрасслоения. Геометрический смысл нормали $\vec{P}$ выясняется в следующей теореме.

Теорема 6. *Вдоль кривой, касающейся нормали* $\vec{P}$, *нормаль* $\vec{V}$ *переносится параллельно.*

В каждом центре А нормаль 1-го рода $V_1 = [A, \vec{V}(A)]$ плоскости Н(А) определяется вектором

$$\vec{V} = V_n^a\vec{e}_a + \vec{e}_n . \qquad (44)$$

Найдем $d\vec{V}$ при смещении центра А вдоль любой кривой

$$\omega^b = P_n^b\omega^n , \qquad (45)$$

касающейся нормали $\vec{P}$. Приведем вычисление дифференциала $d\vec{V}$, используя формулы (1), (13), (19*a*), (40), (42) — (45). Имеем

$$\begin{aligned}
d\vec{V} &= (dV_n^a\vec{e}_a + V_n^b\omega_b^a\vec{e}_a + V_n^a\omega_a^n\vec{e}_n + \omega_n^a\vec{e}_a + \omega_n^n\vec{e}_n) = \\
&= (dV_n^a + V_n^b\omega_b^a + \omega_n^a)\vec{e}_a + (V_n^a\omega_a^n + \omega_n^n)\vec{e}_n = \\
&= (dV_n^a + V_n^b\omega_b^a - V_n^a\omega_n^n + \omega_n^a - V_n^aV_n^b\omega_b^n)\vec{e}_a + \\
&+ (V_n^a\vec{e}_a + \vec{e}_n)(V_n^a\omega_a^n + \omega_n^n) = \\
&= (V_{nK}^a\omega^K - V_n^aV_n^b\Lambda_{bK}^n\omega^K)\vec{e}_a + \vec{V}\cdot\widetilde{\theta} = \\
&= (V_{nb}^a - V_n^aV_n^c\Lambda_{cb}^n)\omega^b\vec{e}_a + (V_{nn}^a - V_n^aV_n^b\Lambda_{bn}^n)\omega^n\vec{e}_a + \vec{V}\cdot\widetilde{\theta} = \\
&= (\vartheta_{nb}^aP_n^b + \vartheta_{nn}^a)\omega^n\vec{e}_a + \vec{V}\cdot\widetilde{\theta},
\end{aligned}$$

где $\widetilde{\theta} = V_n^b\omega_b^n + \omega_n^n$. Итак, $d\vec{V} = \widetilde{\theta}\vec{V}$.

6. Функции

$$P_n^{\alpha} \overset{def}{=} -\vartheta_b^{\alpha n}\vartheta_{nn}^b, \; P_n^i \overset{def}{=} -\vartheta_b^{in}\vartheta_{nn}^b \qquad (46)$$

удовлетворяют уравнениям

$$\nabla P_n^{\alpha} + \omega_n^{\alpha} = P_{nK}^{\alpha}\omega^K, \; \nabla P_n^i + \omega_n^i = P_{nK}^i\omega^K. \qquad (47)$$

Следовательно, поля (47) квазитензоров 2-го порядка (46) задают поля нормалей 1-го рода P_{m+1} и P_{n-m} соответственно L-, Λ-подрасслоений данного $\mathcal{H}$-распределения. Согласно биекции Бомпьяни — Пантази (4)—(6) полям нормалей 1-го рода $P_1(A)$, $P_{m+1}(A)$, $P_{n-m}(A)$ соответствуют поля нормалей 2-го рода $P_{n-2}(A)$, $P_{m-1}(A)$ H-, L-, Λ-подрасслоений, определяемые полями квазитензоров $\{p_a\}$, $\{p_\alpha\}$, $\{p_i\}$, где

$$\begin{aligned} p_a &= -\Lambda_{ab}^n P_n^b - \mathscr{A}_a, \nabla p_a = p_{aK}\omega^K, \\ p_\alpha &= -\Lambda_{\alpha\beta}^n P_n^{\beta} - \mathscr{A}_\alpha, \nabla p_\alpha = p_{\alpha K}\omega^K, \\ p_i &= -\Lambda_{ij}^n P_n^j - \mathscr{A}_i, \nabla p_i = p_{iK}\omega^K. \end{aligned} \qquad (48)$$

Теорема 7. *Поля инвариантных нормализаций*

$$(P_n^i; p_i), \; (P_n^{\alpha}; p_\alpha), \; (P_n^a; p_a)$$

соответственно Λ-, L-, H-подрасслоений $\mathcal{H}$-распределения внутренним образом определены в дифференциальной окрестности 2-го порядка полями квазитензоров (43), (47) и тензоров (48).

Список литературы

1. *Попов Ю.И.* Поля геометрических объектов гиперполосного распределения аффинного пространства. Калининград. 1986. 50 с. Деп. в ВИНИТИ 21.09.87, №6807—В87.

2. *Попов Ю.И.* Нормализация гиперполосы SH_m // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2012. Вып. 10. С. 131—141.

3. *Алшибая Э.Д.* К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве // Труды геометрического семинара / ВИНИТИ АН СССР. М., 1974. Т. 5. С. 169—192.

4. *Алшибая Э.Д.* Геометрия распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве : моногр. Тбилиси, 1999.

5. *Остиану Н.М.* Распределение гиперполосных элементов в проективном пространстве // Труды геометрического семинара / ВИНИТИ АН СССР. М., 1973. Т. 4. С. 71—120.

Yu. Popov

Fields of geometric objects for $\mathcal{H}$-distribution of affine space

Fields of invariant normalizations in the sense of Norden for the main structural subbundles of hyperband distributions in the affine space A_n in differential neighborhoods of the first and second order are constructed. Ostianu — Alshibaya normalizations of Λ-, L-, H-subbundle of the $\mathcal{H}$ -distribution are introduced in the second order differential neighborhood. The geometric meaning of the first kind normal $\vec{P}$ of the $\mathcal{H}$ -distribution is determined: normal $\vec{V}$ is parallel transferred along the tangent curve to the normal $\vec{P}$.

УДК 514

Г. А. Султанова, В. Ф. Тимербулатова
Пензенский государственный университет

Делители нуля алгебр антициклических и циклических чисел

Целью работы является нахождение делителей нуля алгебр $R(i^{m-1})$ и $R(e^{m-1})$, вычисление первой квадратичной формы поверхностей, содержащих все делители нуля их алгебр.

Ключевые слова: делители нуля, алгебра антициклических чисел, алгебра циклических чисел, первая квадратичная форма.

Пусть

$$R\ (i^{m\text{-}1}) = \left\{ a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \ldots + a_{m-1} i^{m-1} | a_0, a_1, \ldots, a_{m-1} \in R \right\}$$

— алгебра антициклических чисел, базис которой составляют степени $i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2, \ldots,\ i^{m\text{-}1}$ элемента i, который удовлетворяет соотношению $i^m = -1$;